

DOSSIER MCX XIX

Août 2005

Logologie des mathématiques

Ingénierie formelle des signes, règles et sens

Charles Roig †

Professeur honoraire à l'Université de Genève

Membre du GRASCE, UA CNRS 935, Université d'Aix –Marseille (1989-2002)

(Groupe de Recherche sur l'Adaptation, la Systémique et la Complexité Economique)

Co - animateur du Réseau Intelligence de la Complexité dès sa constitution en 1988-89

Ce dossier a été réalisé et 'édité' par **Damien ACQUAVIVA**, neveu de Charles ROIG, à partir du manuscrit que ce dernier venait d'achever peu avant sa disparition le 14 juillet 2002, JL Le Moigne, qui avait eu le privilège d'être fréquemment, à Aix en Provence, l'interlocuteur de Ch. Roig au fil des années précédentes, en particulier pendant la longue genèse de ce texte original et innovant à bien des titres, souhaitait vivement qu'il puisse être mis à la disposition de tous, mais il savait la difficulté pratique de cette édition, à partir d'un manuscrit 'dactylographié à l'ancienne' et couvert de corrections, compléments et schémas divers. Aussi sommes nous particulièrement reconnaissant à Damien Acquaviva pour les longues soirées qu'il a consacrées avec beaucoup d'intelligence, à sa remise en forme enregistrée et publiable. Nous remercions aussi **Madame Madeleine Roig**, qui nous autorise à publier dans la collection des Dossiers MCX du site du réseau Intelligence de la Complexité, ce texte dont elle conserve la propriété

Une très brève présentation de ce dossier est complétée par quelques lignes du 'Mémorial' que nous avons publié en apprenant la disparition de Charles Roig

PRESENTATION SUCCINCTE DE 'L'ESSAI DE LOGOLOGIE DES MATHEMATIQUES, INGENIERIE FORMELLE DES SIGNES, REGLES ET SENS' de Charles ROIG, 2002 ?

(Note de JLM, août 2005)

« **Restituer à la formalisation sa complexité en tant que forme de régulation** » : Peut-on présenter dans ces termes le projet développé ici par Charles Roig ? Le sous-titre qu'il donna à son '*Essai de Logo – Logie*' éclaire peut-être aussi son projet ? « **Ingénierie formelle des signes, règles et sens** » ? On comprend pourquoi nous avons été volontiers attentifs à cette entreprise originale de complexification réfléchie de la formalisation impliquée dans toutes nos entreprises de modélisation de systèmes complexes. (Ne trouvons nous pas ici par exemple, par un autre éclairage, le concept de '*modélisation par attraction de continuité sémantique par continuités de voisinage*' que nous proposait il y a peu M Mugur-Schachter : Voir son étude <http://www.mcxapc.org/docs/ateliers/0506mioara.pdf>). Quelques lignes de l'introduction et de la conclusion de cet essai de Logologie feront peut-être percevoir son projet sous un autre angle ?

« *La conception logo - logique de la formalisation permet d'interpréter celle-ci comme une intellection dynamique opérant dans plusieurs directions, suivant différentes modalités tenant compte de la nature évolutive et perfectible des formes linguistiques définissables, allant de la rigueur et de la certitude au doute et au mythe, dans une perspective toujours ouverte au questionnement ? Cette approche permet de restituer à la formalisation sa complexité en tant que forme de régulation langagière spécialisée dans ses expressions logique et mathématique, mais en excluant tout réductionnisme en raison de ses liaisons avec d'autres composants linguistiques suivant des modalités normatives adaptatives exprimées par des termes tels que 'métalangages', 'métamathématiques' (ou 'méta modèles') traduisant les incertitudes des mathématiciens concernant les vérités, les axiomes ou paradigmes, donnant lieu à des traductions logiques, philosophiques ou rhétoriques énoncées dans des langages courants.* »

MEMORIAL CHARLES ROIG
Chercheur interdisciplinaire exemplaire

Notre ami Charles ROIG nous a quitté le dimanche 14 juillet 2002, alors qu'il achevait, dans la retraite aixoise où sa santé l'avait conduit à se retirer, ce beau texte sur l'intelligence du langage dans la pensée scientifique, en particulier en mathématique. Ce brillant professeur de sciences politiques (à qui l'on doit une passionnante réflexion sur les sources et le développement du totalitarisme ("*La grammaire politique de Lénine*", Ed. l'Age d'Homme, 1980), était aussi un esprit de grande culture, passionné à la fois par les mathématiques et leur histoire comme par la linguistique et la sémiologie, les sciences de la cognition et la nouvelle rhétorique, l'anthropologie et la sociologie.

Ayant eu, à l'université de Grenoble, à travailler avec Y. Barel à la fin des années soixante, il devint un des premiers chercheurs français en systémique (Il publie en 1970 "*L'analyse de systèmes en sciences sociale*" dans la *Revue française de Sociologie*). Un long séjour aux USA, à Chicago, lui donne l'occasion d'approcher l'anthropologue Kenneth Burke, avec lequel il entretiendra ensuite une passionnante correspondance dont on trouve les traces dans son très riche ouvrage "*Symbole et Société*" (Ed. Peter Lang, 1977). Chercheur interdisciplinaire exemplaire, Charles Roig sera ensuite professeur à l'Université de Genève (et Doyen de la Faculté des sciences économiques et sociales). Charge qu'il dut abandonner pour raison de santé à la fin des années 80.

Pour ses amis aixois, cette retraite fut une chance : Nous fumes quelques uns à nous enrichir de sa culture et de ses amicales contributions. Il fut ainsi un des discrets mais actifs pionniers de la constitution du Programme européen Modélisation de la CompleXité en 1988-89. C'est dans ce cadre qu'il publia alors plusieurs importantes recherches centrées sur "le paradigme des interfaces langagières" : "*Auto-organisation du texte et production grammaticale de connaissance*" (Dossier MCX VI, mai 1993), "*Sur la formation épistémique des langages: dubitation, rhétorique et modélisation des interactions sociales*" (Dossier MCX VII, mars 1994), "*Le discours sur et dans les mathématiques, argumentation et démonstration*" (Dossier MCX X, mai 1995). Il achevait cet important "*Traité de Logologie*" (qui m'avait valu la chance de longues conversations avec lui, au long de ces dernières années pendant l'écriture de cet ouvrage particulièrement novateur (que l'on peut publier grâce au concours d'un de son neveu, Damien Acquariva).

Puisse ce chercheur interdisciplinaire exemplaire rester pour nous tous l'inspirateur fraternel qu'il fut parmi nous.

JLM

(Texte repris du Mémorial MCX-APC <http://www.mcxapc.org/docs/memorial/roig.htm>)

Logologie des mathématiques

Ingénierie formelle des signes, règles et sens

Charles Roig

Dans une conception liminaire de la logologie, le rapport entre langage et formalisation peut être traité comme une "étude en mots portant sur des mots" (K. Burke) ou, mieux encore, comme un logos sur le logos faisant référence à la définition originelle du logos en tant qu'interaction entre le langage et la raison pouvant être étendue au processus cognitif permettant une auto organisation des percepts en compréhension, des énonciations en questionnements et négations, de la grammaire et de la dialectique en constructions rationnelles. Cette approche permet de restituer à la formalisation sa complexité en tant que forme de régulation langagière spécialisée dans ses expressions logique et mathématique, mais en excluant tout réductionnisme en raison de ses liaisons avec d'autres composants linguistiques suivant des modalités normatives adaptatives exprimées par des termes tels que "métalangages" ou "métamathématiques" traduisant les incertitudes des mathématiciens concernant les vérités, les axiomes ou paradigmes, donnant lieu à des traductions logiques, philosophiques ou rhétoriques énoncées dans des langages courants.

Un constat préalable : pour les linguistes, lorsqu'ils la mentionnent, la mathématique est un objet d'allusions brèves et marginales dont voici quelques exemples pouvant, tout au moins, légitimer notre entreprise.

En marge du structuralisme linguistique, N. Chomsky signale, dans Le langage et la pensée (trad., Paris, Payot, 1970 : 107), que "l'existence de principes définis de grammaire universelle rend possible l'élaboration d'une linguistique mathématique, discipline qui soumet à l'étude abstraite la classe des systèmes génératifs remplissant les conditions établies par la grammaire universelle. Cette étude vise à élaborer les propriétés formelles de toute langue humaine possible... La linguistique mathématique semble se trouver aujourd'hui dans une position favorable, parmi les approches mathématiques en sciences sociales et psychologiques..."

A. Schaff (Langage et connaissance, trad., Paris Anthropos, 1969 :202) relève les divergences existant à ce sujet entre les linguistes : "Carnap et Ajdukiewicz avaient fixé leur esprit sur les langues mathématiques spéciales et ils négligèrent le problème de leurs rapports avec le langage naturel, étendant inconsidérément les thèses valables pour les systèmes symboliques spéciaux au langage en général... J. Joergenson procède à une

critique bien plus radicale de ce point de vue en refusant à la symbolique mathématique et à toute symbolique en général le droit au nom de "langue" qu'il réserve strictement au langage naturel..."

I. I. Revzin (Les modèles linguistiques, trad., Paris, Dunod, 1968 : 2-3) propose une solution médiane : "Dans sa partie déductive, la linguistique peut être construite, semble-t-il, à la façon des mathématiques ou de la logique ; c'est-à-dire, en dégagant un nombre minimum de notions premières, non définissables, à partir desquelles on définit toutes les autres. De plus, on doit formuler avec précision certains énoncés premiers sur les liaisons de ces notions entre elles (axiomes) et démontrer toutes les autres assertions, c'est-à-dire, les ramener à des énoncés antérieurs... Actuellement, on ne voit pas bien comment faire entrer dans le cadre d'une théorie déductive rigoureuse toute la multiplicité des faits assez contradictoires de la réalité de la parole, tels qu'ils sont décrits dans de nombreuses grammaires des langues naturelles!".

L. Hjelmslev (Prolégomènes à une théorie du langage, trad., Paris, Ed. Minuit, 1968-71; 137, 142) estime "fructueux et nécessaire d'établir dans un nouvel esprit un point de vue commun à un grand nombre de sciences allant de l'histoire et de la science littéraire, artistique et musicale à la logistique et aux mathématiques, pour qu'à partir de ce point de vue commun celles-ci se concentrent autour d'une problématique définie en termes linguistiques... C'est aux spécialistes de ces divers domaines qu'il appartient de décider si les systèmes de symboles mathématiques ou logiques, ou certains arts comme la musique, peuvent ou non être définis de ce point de vue comme des sémiotiques".

R. Carnap (The Logical Structure of the World, trad., UCLA, 1969 : 178) observe "qu'il est important de préciser que les objets logiques et mathématiques ne sont pas vraiment des objets au sens d'objets réels (objets dans les sciences empiriques). La logique (incluant les mathématiques) consiste uniquement en conventions concernant l'utilisation des symboles, et en tautologies sur la base de ces symboles. Ainsi, les symboles de la logique (et des mathématiques) ne désignant pas des objets, servent uniquement d'explicitation pour ces conventions".

A. Jacob (Introduction à la philosophie du langage, Paris, Gallimard-Idées, 1976 : 168) pense que "d'une manière générale, le travail d'abstraction et d'explication de la science peut déjà être considéré comme une mise en forme de l'expérience. Le sensible s'y résorbe dans le relationnel, en particulier formulé mathématiquement... Bien plus, les mathématiques n'ont acquis leur pouvoir méthodologique que dans la mesure où elles correspondent à un monde de "formes". Toutefois, ici encore, pour couper court à toute interprétation méphysique superflue ou même néfaste, des expressions plus dynamiques, c'est-à-dire plus fidèles aux procès en cause, seraient préférables : mise en forme et formalisation."

Pour J. Kristeva (Le langage, cet inconnu, Paris, Seuil-Points, 1981: 247 sq) "la linguistique mathématique a pris naissance pour des raisons techniques : la construction des circuits électriques d'ordinateurs destinés à lire et à écrire ou de machines destinées à la traduction automatique. Il est évidemment nécessaire, pour que la matière linguistique soit programmable dans les calculatrices, qu'elle soit traitée de la façon la plus rigoureuse et la plus précise... Mais la linguistique mathématique à proprement parler constitue un domaine autonome dans lequel il faut distinguer deux branches : la linguistique quantitative ou statistique, et la

linguistique algébrique ou algorithmique... La théorie de l'information donne lieu à une autre conception mathématique du langage..."

Ces textes décrivent les rapports entre langage et mathématique par une variété d'approches et d'interprétations où surgissent des termes-clés suscités par une vision globalisante, au-delà des deux disciplines concernées: linguistique mathématique et grammaire universelle, systèmes symboliques spéciaux et langages naturels, notions premières et liaisons axiomatiques, conventions et tautologies pour l'utilisation des symboles, abstraction et formalisation de l'expérience, technologie informatique et linguistique formelle. En bief, toutes ces opinions et conceptions apparaissent à la fois comme partielles et superficielles mais aussi comme sources d'inspiration. On peut parier sur les divers degrés de vérité qu'elles représentent pour valoriser la définition d'un programme tendant à reconsidérer les définitions disciplinaires du langage par les linguistes et de la formalisation par les mathématiciens classiques.

Le premier chapitre introduit et expose la représentation logologique de l'interface langagière entre sujet et environnement, gérée par une grammaire auto organisatrice des formes de connaissance. Basée sur une ingénierie des composants linguistiques, cette propriété d'auto organisation grammaticale permet de concevoir des liaisons entre l'intuition ou l'inspiration en tant que forme préconsciente d'une connaissance possible, et le raisonnement ou la démonstration formelle, source d'objets mathématiques construits à partir du langage modélisateur de lui-même. Cette conception est développée dans les chapitres suivants selon différentes approches linguistiques.

Ch. I. Synthèse logologique : la grammaticalisation cognitive

Depuis l'antiquité, les philosophes et les linguistes, les logiciens et les mathématiciens ont conçu des approches théoriques pour caractériser et problématiser les langages de la formalisation, de la persuasion à la démonstration. Cette investigation interdisciplinaire concerne tous les chercheurs utilisateurs de ces langages ce qui justifie la perspective qui sera présentée comme l'expression d'un logos sur le(s) logos, en bref, une grammaticalisation cognitive auto organisée en vue de permettre la gestion de l'interface langagière séparant et unissant l'intériorité d'un sujet et l'extériorité de son environnement.

I. 1. Composants et formes de l'auto organisation des langages

I. 1.1. Régulation

Évoquons un remarquable précédent historique remontant au XVIIIème siècle constitué par un groupe de penseurs novateurs, les Idéologues, notamment Destutt de Tracy, Cabanis, inspirés par DuMarsais, Condorcet... Un groupe qui développa une approche grammaticale de la pensée avant d'être écarté puis oublié par les philosophies engagées du XIXème siècle : spiritualité, scientisme, matérialisme. Un groupe dont le but était l'étude scientifique de la formation des idées dans l'esprit humain à une époque où la "science grammaticale" s'imposait en rapport avec l'extension des langues nationales au détriment notamment du latin jugé dépassé et inadapté aux cultures nouvelles dont la Réforme, la Renaissance et les Lumières étaient les manifestations les plus marquantes. Ainsi défini, le terme "idéologie", discrédité comme on sait, reste un terme précurseur et l'équivalent métaphorique de la logologie. En voici une formulation convaincante à cet égard (F. Thurot, Tableau des Progrès de la Science Grammaticale-(1796), Paris, Ducros (Intro. A. Joly, 1970 : 66) : "La science grammaticale, ou la connaissance approfondie de l'art de la parole, est essentiellement liée à tous les objets de notre intelligence, mais surtout à la métaphysique, qui est la science des idées, et à la logique, qui est l'art de conduire son esprit dans la recherche de la vérité ; et il est à remarquer que dans la langue grecque, la plus philosophique et la plus parfaite que les hommes aient jamais parlée, le même mot, [logos], signifiait à la fois, discours, raisonnement, et même, l'art de raisonner, la logique".

*
* *

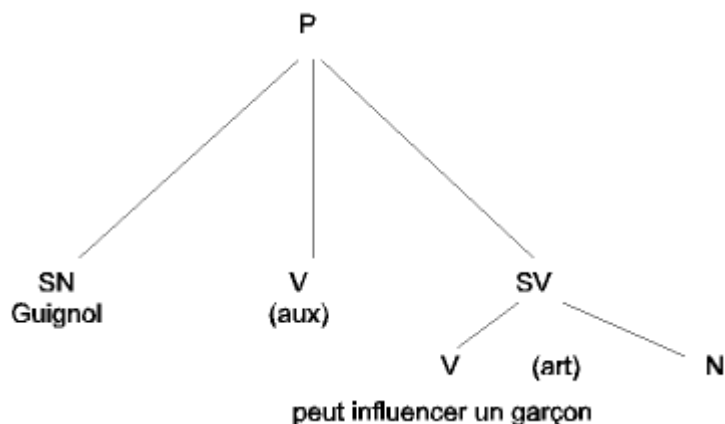
Citons ensuite L. Wittgenstein (Grammaire philosophique, trad, Paris, Gallimard, 1980) pour qui "grammaire" est un terme-clé caractérisé comme suit dans la présentation (M.A. Lescourret) : la grammaire philosophique "apparaît dès les premiers écrits, affirmant dès cet instant son lien étroit avec l'activité

philosophique, et sa totale distinction d'avec la grammaire grammairienne dont les analyses superficielles sont à la base de bien des erreurs philosophiques... 'La défiance envers la grammaire est le premier réquisit de tout philosophe', stipule Wittgenstein dans les Notes sur la logique". Suivent quatre propositions définitoires : "La grammaire philosophique régit le rapport entre langage et réalité. La grammaire ne nous dit pas le vrai et le faux, mais ce qui a du sens et ce qui n'en a pas. La grammaire est le procès-verbal des transactions linguistiques. [La grammaire] ne tient pas compte des impressions psychologiques qui les accompagnent". La définition de la grammaire comme "condition de possibilité du double sens du langage" peut être retenue pour définir les caractéristiques essentielles de la gestion grammaticale de l'interface langagière : premièrement, "en tant que méthode de projection reliant le plan de la réalité à celui du langage... en reconstruisant la réalité dans le milieu linguistique, transposant l'un dans l'autre" ; deuxièmement, "en tant que description phénoménologique de l'usage du langage dans lequel cette construction de réalité se manifeste avec une multiplicité qui est fonction des différentes circonstances au cours desquelles intervient notre activité linguistique" (op. cit. : 8-11). Cette méthode est applicable au langage mathématique dans des conditions sur lesquelles nous aurons à revenir (Infra).

I. 1. 2. Structuralisme

La théorie structuraliste de N. Chomsky (Aspects de la théorie syntaxique, trad., Paris, Seuil, 1971 : 93) offre une première approche pour établir et exploiter des relations formelles linguistiques grâce aux universaux à la base des grammaires génératives par explicitation des structures syntaxiques au niveau phrastique des langues. Les principes ainsi posés constituent la "structure profonde, source de circuits reliant des entités de base telles que la phrase (P), le syntagme verbal (SV), le syntagme nominal (SN) auxquelles s'ajoutent des auxiliaires et des articles (aux, art). Une phrase telle que "Guignol peut influencer un garçon" peut être représentée schématiquement par un circuit linéaire dont la formule est :

(SN) V (aux) (SV : V + (art) N)



Dans une étude plus récente, l'auteur (in La nouvelle syntaxe, trad., intro. A. Rouveret, Paris, Seuil, 1987 : 84) signale " un déplacement progressif d'intérêt de l'étude des systèmes de règles qui se sont appauvris, comme nous l'espérons, vers l'étude des systèmes de principes qui, eux, sont apparus comme occupant une position centrale pour la détermination du caractère et des variétés des langues humaines possibles". La présentation par A. Rouveret (op. cit.:29) met en valeur cet élargissement de la grammaire rendue à la fois plus englobante et plus fonctionnelle, plus apte à s'ouvrir sur la formalisation grâce à la précision de son substrat langagier. Dans le tableau suivant, la grammaire en tant que système de règles (écrites en minuscules) n'est qu'une composante de niveaux de représentation "dérivant des principes logiques (en majuscules)" se référant à la forme logique (FL) que l'on peut compléter par un déplacement vers la forme mathématique (FM) :

(PROPRIETES SEMANTICO-LOGIQUES FONDAMENTALES DE E)

STRUCTURE DE SURFACE

LANGAGE COMMUN (LC)

SUBSTRAT LANGAGIER LOGOLOGIQUE

Ce tableau, en prolongeant la théorie des structures profondes par la forme logique opérant par effacement et par la forme mathématique opérant par réduction, et construction, met en valeur certains liens existant entre les langages communs et les langages mathématiques, liens dépendant des choix et des raisonnements de sujets dans un environnement. On peut également envisager un processus inverse constitué par un retour au langage commun et un passage de la forme mathématique à la forme logique impliquant de nouvelles interprétations au niveau de la structure de surface en vue notamment de limiter l'effet réductionniste de la mathématisation quitte à faire appel à des "systèmes de principes" jugés appauvrissants, pouvant apparaître comme des paradigmes idéologiques, cependant indispensables pour assurer la cohérence et la cohésion des systèmes localisés. Ce point est illustré par les conceptions de la grammaire exposées dans les textes suivants.

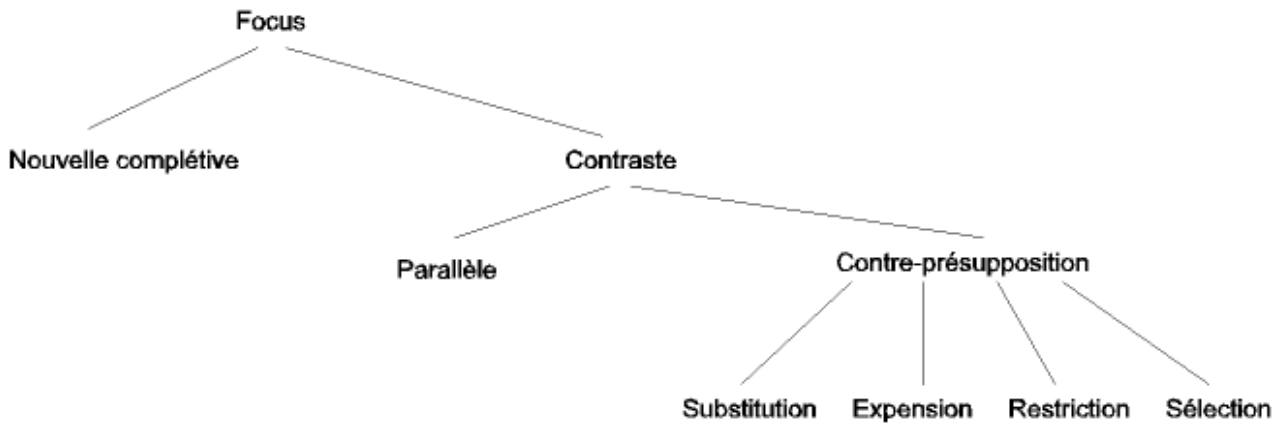
I. 1. 3. Fonctionnalisme

Par contraste avec la théorie chomskienne, A. Siewierska (Functional Grammar, New-york, Routledge, 1991 : 14 sq, 153 sq, 173 sq) définit la grammaire fonctionnelle (GF) / principalement comme "la construction d'une grammaire fonctionnellement systématique et cohérente". "Les caractéristiques indépendantes du langage dans les affirmations sous-jacentes à GF (structure hiérarchique, fonction sémantique, syntaxique et pragmatique; types d'opérateurs) sont ce qui rendent ces constructions aptes à représenter la connaissance humaine sans tenir compte du langage utilisé... Les affirmations sous-entendues peuvent aussi servir de repères pour les opérations logiques, déductions inductives ou probabilistes, étant toutes impliquées dans la formulation d'inférences logiques à partir de connaissances fragmentaires. Ainsi, la forme logique des expressions linguistiques est identifiée à la forme grammaticale, ce qui est une autre déviation par rapport à l'orthodoxie". Les formes du non-dit sont alors explicitées.

A propos du concept de "topicalité" on peut noter la définition suivante qui concerne un sens implicite défini par référence à un texte :

"La topicalité est avant tout une relation entre une entité discursive qui n'est pas l'énonciation, mais la structure d'ensemble du discours". Une relation définie comme "très problématique", qui a pu être ramenée à une série de "formes" fréquentes dans les langages spécialisés : "partie de, membre de, sous-ensemble de, cas de, copie de, opposé à, projection de, associé avec". La rhétorique des tropes n'est pas mentionnée mais elle est présente dans cette approche fonctionnelle constructive et abstractive à partir de liaisons et de voisinages déterminant une gradation d'acceptabilité lui conférant le sens "technique" qu'elle a dans la grammaire cognitive.

L'autre concept à retenir est la "focalité" ou "focus" défini comme "l'information relativement la plus importante ou saillante dans une énonciation en relation avec l'information pragmatique sur la liaison émetteur-récepteur". Cette modélisation est présentée par un schème que nous traduisons comme suit :

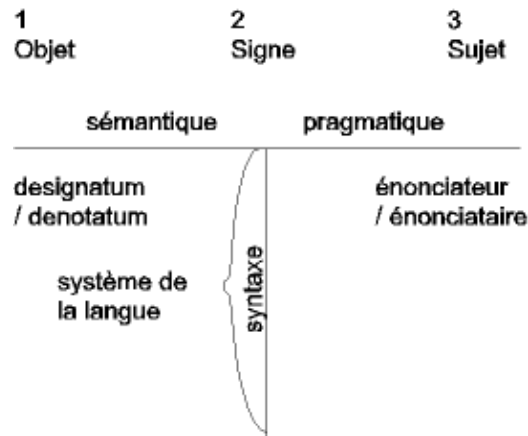


Le focus implique l'innovation et le contraste non contradictoire, contradictoire ou dialectique, suite aux nombreuses situations de communication dans des sociétés géographiquement et historiquement différenciées. Ces situations sont conditionnées par de nombreux facteurs relevant autant de l'action symbolique que de références implicites (environnement, valeurs, hiérarchies) qui supposent des interprétations "relativistes" orientées vers une traduction compréhensive du focal préalablement à des combinaisons avec des composants non-locaux (G. MacDonald, P. Petitot, Semantics and Social Science, London, Routledge Kegan, 1981).

I .1. 4 .Semiosis

En rapport avec cette approche se situe le point de vue de l'empirisme scientifique tel que le présente C.W. Morris dans l'International Encyclopedia of Unified Science (Vol. I, n° 1, Univ. of Chicago, 1938, 1970 : 63 sq.). La imétascience ou science de la science y est définie à partir des trois facteurs linguistiques : la syntaxe, la sémantique et la pragmatique dont l'articulation sémiotique est schématisée comme suit (in K.O. Apel, Le logos propre au langage humain, trad., Combas-L'éclat, 1994: 21 sq).

Schéma de sémiotique (Morris-Carnap)



Le signe est au centre de cette conception de la sémiotique (inspirée par Peirce).

Etant donné l'ambiguïté du terme "logique", il est jugé préférable de parler "d'investigations syntaxiques du langage de la science" pour désigner l'étude de la "structure" de ce langage, à savoir : les "relations entre mots et phrases d'une ou plusieurs sciences" susceptibles de révéler leur unité ou leur diversité.

Les signes constitutifs des écrits et des discours ont cependant quelque "corrélation avec des objets dont l'étude est l'investigation sémantique du langage de la science". L'unité ou la diversité de ce langage dépend alors de ces relations aux objets.

Un troisième facteur concerne "les contributions et les produits de l'activité des scientifiques faisant l'objet d'investigations pragmatiques!". Il s'agit de traiter la science en tant qu'institution sociale et en tant que source de projets, de procédures et de conséquences.

Il convient de tenir compte du fait que la sémiotique ainsi définie recouvre de multiples faits complexes tels que l'histoire, l'intersubjectivité, la subjectivité intentionnelle ou compréhensive dans l'interprétation des signes, etc...

1.1.5. Complexité

Dans The Philosophy of Linguistics (J. Katz (Ed.), Oxford Univ. Press, 1985 : 11), les nombreuses théories linguistiques de la grammaire sont présentées dans trois perspectives métaphoriques concernant également la logique et les mathématiques : "en tant qu'objets physiques comme le demandent les nominalistes, en tant qu'objets psychologiques comme le demandent les conceptualistes, en tant qu'objets abstraits comme le demandent les réalistes". Ces trois points de vue peuvent se situer dans une approche logologique globale des langages pour répondre à la question d'ontologie qui est posée. Nous retenons les présentations suivantes des trois interprétations.

Le nominalisme de Z. Harris (op. cit. : 26 sq) met l'accent sur la structure distributive concernant "un ensemble de phénomènes ou de données structuré par rapport à quelque caractéristique pour autant que l'on puisse formuler en terme de cette caractéristique un système d'énoncés qui décrit les membres de l'ensemble et leurs interrelations (au moins jusqu'à un certain niveau de complexité)". Le problème posé concerne la définition de la relation entre la distribution et le sens sous forme d'une "structure signifiante parallèle". La solution donnée par l'analyse distributionnelle repose sur plusieurs constituants de base : l'élément, la similarité, la dépendance sérielle, la substituabilité parallèle, les domaines. La grammaire a pour fonction d'établir une liaison entre éléments représentant des régularités distributionnelles dans certains domaines, de la phrase au discours, bien que de manière plus faible dans ce dernier. D'un point de vue linguistique idéo figuratif, on peut retenir de cette interprétation entre l'idée de base d'une combinaison rationnelle entre métaphores comme connexions et inférences, et une topique de lieux que l'on essaye de définir en termes grammaticaux globaux différents de ceux que l'on trouve dans les "langages" formels ou codés par spécialités: mathématiques, codes, musique, Par exemple. Cela n'est pas sans évoquer l'idée de "modèle" ou de "modélisation" qui est à retenir.

S. Stich développe le point de vue psychologique (op. cit.: 126 sq) impliquant la grammaire, la psychologie et l'indétermination. Il est conduit, après W. Quine, à substituer les jugements intuitifs aux énoncés explicites pour juger la construction d'un système de règles. L'accent est alors mis sur l'acceptabilité en tant que condition graduée de la grammaticalité comme notion théorique reliée de multiples manières aux données disponibles. "L'adoption d'une grammaire donnée ou d'une forme de grammaire pourrait être considérée comme la formulation d'un paradigme ou d'un plan pour de futures investigations. La grammaire sert à séparer les phénomènes nécessitant plus d'explication.., de ceux qui sont déjà traités avec succès... Une grammaire n'est qu'une théorie axiomatisée mais c'est un truisme qu'une théorie qui peut être axiomatisée peut aussi l'être de manière radicalement différente". Conformément à la conception logologique, le concept de grammaire devient ainsi une formulation possible d'une régulation orientée vers la quête de connaissances dans sa complexité et son évolution, une forme de langage toujours à construire par divergences et adaptation.

La capacité et l'action symboliques exprimées par les formes langagières, peuvent aller plus loin dans le traitement paradoxal du rapport entre intension abstractive et extension démonstrative. Réalistes, T. Langendoen et P.M. Postal (op. cit.: 227 sq) s'opposent à la théorie de Chomsky concernant l'existence d'un langage naturel (LN) que les être humain connaîtraient par sa grammaire : "La collection des phrases comprise dans chaque LN individuel est si vaste que son ampleur ne peut être mesurée par aucun nombre, fini ou transfini". De ce constat résulte une comparaison avec la théorie cantorienne, étant donné "le strict parallélisme entre la collection de toutes les phrases d'un LN et la collection de tous les ensembles... Le raisonnement qui établit que la collection de tous les ensembles ne peut être elle-même un ensemble... établit également que toutes les phrases de LN ne peuvent constituer un ensemble". Cela pourrait résulter d'une suite de principes et de théorèmes définissant des relations arborescentes entre concepts pour définir un argument linguistique en tant qu'argument mathématique. Les principales étapes sont les suivantes :

- La définition de la grammaire par une liaison de noeuds conjoints ou sous conjoints dans une composition coordonnée de mots à partir d'un noeud constitutif.

- La clôture de la liaison composée est définie par un ensemble de constituants d'une catégorie $> *$ ("projection coordonnée") et d'un composé coordonné de la même catégorie ("ensemble de projection"). Une approche ensembliste permet alors de définir par projection la clôture de toutes les phrases ordonnées en tant qu'objets limités.

- Cette possibilité permet un rapprochement par analogie avec le paradoxe de Cantor concernant l'ensemble fini impliquant une correspondance binaire opposé aux ensembles infinis équipotents à ses propres parties, ce que vérifie le nombre transfini des constituants coordonnés de l'ensemble fini des phrases, source d'innombrables compositions de phrases. D'où le théorème de "l'immensité du LN non pas constitué d'ensembles ou d'ensembles d'ensembles mais de "méga collections". La preuve formelle d'un théorème mathématique est ainsi distinguée de l'argumentation informelle dans le domaine des faits auxquels on l'applique et qui ne respecte pas toutes les assomptions sous-jacentes à ; une preuve. "Ainsi, on peut considérer les grammaires et la théorie grammaticale comme étant concernées par la projection de phrases attestées du LN, données de base de l'investigation grammaticale, dans les collections régulatrices maximales des caractéristiques dont les phrases attestées sont des exemples accidentels...

On ne peut jamais remplacer valablement une projection forte ou générale par une projection faible ou plus limitée à moins d'être motivé factuellement, notamment par une généralisation excessive conduisant à quelque fausse inférence".

La translation du transfini formel en grammaticalisation linguistique mérite d'être retenue en tant que forme de la transformation d'une définition en extension en définition en intension. Elle met en évidence le problème de la vérité relative des propositions formelles et logiques ou véricondition de leur validité par rapport à trois variables : la représentativité des faits ou éléments ayant servi de base à leur énonciation ; les niveaux de signification pouvant résulter de cette représentativité variable ou aléatoire ; l'utilisation idéologique pouvant être faite de cas interprétables à plusieurs niveaux de signification dans divers cadres pragmatiques ou par rapport à des "paradigmes" (au sens de T. Kuhn) formulant un ordre cardinal normatif, ce qui pourrait constituer une interprétation possible du paradoxe de Cantor.

En résumé, on peut définir un système de règles logiques ou commodés comme un ensemble de sous-systèmes constitué de formes d'interprétation séquentielle, closes ou ouvertes, permettant de transformer des données ou des objets concrets ou abstraits sélectionnés en informations définies en intension ou en extension par un circuit grammatical cognitif combinant intuition, explication et persuasion à différents niveaux par thèmes, lieux et inférences possibles.

I. 1.6. Epistémologie

Suite aux développements précédents, la perspective épistémologique (ou gnoséologique) peut être interprétée comme une volonté de transformer le langage en un instrument de connaissance fiable compte tenu des limites et des contraintes résultant de la complexité de ses multiples composants tant humains qu'objectifs dans l'espace-temps.

Se référant à Brouwer et Lakatos, K.R. Popper (La connaissance objective, trad., Paris, PUF, 1978 : 146-151) considère comme primordial le fait que "les mathématiques (et pas seulement les sciences naturelles) croissent par la critique de conjectures et d'audacieuses démonstrations informelles... Le langage, qui n'est au départ qu'un moyen de communiquer des descriptions d'objets prélinguistiques, devient alors une composante essentielle de l'entreprise scientifique, tout comme les mathématiques deviennent à leur tour partie intégrante d'un troisième monde" étape ultime du processus cognitif. Ainsi, il y aurait des couches ou des niveaux dans le langage, qu'elles soient ou non formalisées dans une hiérarchie de métalangues. Dans le troisième monde de la connaissance, le plus perfectionné, où se créent les objets mathématiques, "le langage devient indispensable en tant que médium de l'argumentation et de la discussion critique..." En permettant un échange entre constructions, critique, intuition et tradition, il se place dans des perspectives diversifiées et enrichissantes portant sur le substrat constitutif de l'interface entre sujet pensant et réalité pensée.

* * *

Récemment, la "nouvelle école linguistique de la grammaire cognitive" a sensiblement élargi et enrichi le champ théorique de la linguistique structurale en y intégrant de manière développementale l'étude des aspects sémantiques du langage impliquant ses relations constructives, de nature métaphorique, avec un monde qu'il convient de définir et d'ordonner (Sémantique cognitive, Communications, Seuil, n° 53, 1991), Cette sémantique cognitive, succédant aux théories historico philologique, structuraliste et logique, est résumée comme suit (D. Geeraerts, op. cit : 36) :

- "Point de vue observationnel : langage en tant qu'outil cognitif".
- "Domaine empirique : la flexibilité de la structure interne, les liens avec le vécu, le caractère encyclopédique des concepts lexicaux".
- "Principe explicatif : catégorisation naturelle (prototypicalité et stratégies cognitives)".

C'est dans cette perspective généralisante qu'il convient de poser le problème de la linguistique de la formalisation sous son double aspect de discipline scientifique et de processus de mathématisation du langage courant, et en tant que grammaire cognitive définie à partir des principes suivants constitutifs de la pensée raisonnée (Cf. également : P. Vandeloise, A.M. Diller, G. Fauconnier, op. cit.).

Le principe d'évolution concerne l'orientation historique des formes lexicales, source d'information sur l'origine et le développement du sens des mots et des signes (rappelons le rôle du Grec et de l'Arabe à l'origine des mathématiques).

Le principe de détermination psychologique conforte le rôle central du sujet dans l'objectivation de la pensée et l'interprétation constructive de l'expérience.

Le principe de globalité se réfère à l'unité de la recherche impliquant "la psychologie, l'intelligence artificielle, la neuropsychologie, l'anthropologie culturelle", à quoi peuvent être ajoutées la communication et la sociologie.

Le principe de spécialisation régit les fonctions cognitives de base des langages. Ses manifestations sont multiples et diverses à l'instar des ressources utilisées pour aller de la dénotation à la fiction ou de l'hypothèse à l'algorithme d'une démonstration. Ces fonctions sont cependant localisables et définissables dans la connaissance par des procédés utilisant "la cohérence interne des catégories naturelles", les "ressemblances" et les "contiguïtés" impliquant une "métaphore conceptuelle... qui réside au niveau non plus des mots, mais de la pensée", ou encore "une représentation formellement adéquate du sens exigeant une interprétation en théorie des modèles". La spécialisation se définit alors métaphoriquement comme une "subdivision" de l'information relativisée dans différents domaines (les "espaces") construits au fil du discours et ordonnés par des liaisons hiérarchiques. Autant de qualifications qui constituent un programme de recherche concernant la pensée mathématique dans ses particularités linguistiques qu'il convient de replacer dans une épistémie globalisante. C'est ce que suggèrent également les textes de mathématiciens dont la diversité est le signe d'une complexité méritant d'être explorée à partir des propriétés du langage, sources d'ambiguïté mais aussi "outils cognitifs" incontournable dans l'interface langagière.

I. 2. La mathématisation du langage entre abstraction et référence

D'un côté de cette interface interviennent des limites inhérentes aux abstractions mathématiques, "langage commode" mais soumis à une logique de vérité, de l'autre côté se manifestent les contraintes d'une réalité concrète ou D'un côté de cette interface interviennent des limites inhérentes aux abstractions mathématiques, "langage commode" mais soumis à une logique de vérité, de l'autre côté se manifeste les contraintes d'une réalité concrète ou abstraite analysée par étapes. Voici les opinions de mathématiciens :

Pour K. Pearson (La grammaire de la science (1892), trad., Paris, Alcan, 1912 : 454), "l'esprit scientifique... doit être préparé, quand de nouveaux faits naturels sont mis en lumière, à examiner s'ils s'adaptent ou non aux schèmes existants. S'ils s'y adaptent, la représentation mentale est rendue grâce à eux, un peu plus complète. Sinon, une modification, un élargissement ou même l'abandon de certaines théories devient indispensable". L'objectif intellectuel était et reste l'élimination de toute clôture idéologique ou logique des grammaires cognitives devant rester provisoires et adaptables.

C'est ce que précise H. Poincaré dans La valeur de la science (Paris, Flammarion, 1927 : introd.) en écrivant que le langage mathématique met en valeur les "analogies internes des choses", leur "harmonie", par la "loi révélatrice des régularités et des transformations des connaissances", ce que permet sa nature de "langage commode", base de "règles hiérarchisées (principes, lois) définies par convention". A retenir l'idée de cette base consensuelle des règles mais aussi des formes et des figures métaphoriques.

A. Lautman (Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits, Paris, PUF, coll. 10-18, 1977 : 87 sq, 254 sq, 287 sq) approfondit cette approche en abordant le problème "de la réalité inhérente aux mathématiques à partir des rapports entre l'essence et l'existence dans une perspective différente de l'intuitionnisme et du formalisme". Bien que présentée sous une forme philosophique, cette conception d'une "métaphysique de la logique" met en valeur et précise les rapports des langages et de la formalisation.

"Il y a ... équivalence dans le fini entre la structure non contradictoire d'un système d'axiomes et l'existence d'un champ comprenant un nombre d'individus déterminé et tel que le système soit réalisable dans ce champ". Cette théorie doit cependant être revue lorsque "les deux notions [essence et existence] cessent d'être relatives aux mêmes êtres mathématiques. Il ne s'agit plus alors de savoir si la définition entraîne l'existence, mais de chercher si la structure d'un système d'axiomes peut donner naissance à un champ d'individus qui soutiennent entre eux les relations définies par les axiomes ... Ce dont l'étude interne de ce système permet d'affirmer l'existence, ce sont les interprétations du système, les champs où les [axiomes] se réalisent". Ainsi, dans le domaine du fini, un système réalisable est constitué d'une définition susceptible d'interprétations référentielles.

Cette relation n'est plus possible quand la réalisation intervient dans un champ infini d'individus. "La possibilité de réalisation étant une exigence plus forte que la non-contradiction ; une dissociation s'établit entre le point de vue extensif et le point de vue structural, le problème de la réalisation doit laisser place ... à une recherche purement interne de l'irréfutabilité", et nous sommes alors dans une situation où l'interprétation du système est indécidable.

Cependant, "notre intention étant de montrer que l'achèvement interne d'un être s'affirme dans son pouvoir créateur, cette conception devrait peut-être logiquement impliquer deux aspects réciproques : l'essence d'une forme se réalisant au sens d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine". Cette idée d'une création autorégulatrice et réciproque de formes abstraites "vers le haut" et "vers le bas" n'est pas sans évoquer ou même suggérer l'idée d'une grammaire créatrice de sens et de connaissance par une gestion appropriée de l'abstraction dans une interface langagière.

Le temps permet ainsi de poser la "détermination transcendantale" de "l'homogénéité d'un phénomène en tant qu'universalité" et de "l'homogénéité d'un phénomène impliqué dans chacune des représentations empiriques de la diversité". Les "mixtes" des théories mathématiques assurent le passage d'un domaine de base à l'existence d'êtres créés sur ce domaine par l'effet d'une pareille dualité interne".

Ainsi :

- 1° Le temps s'écoule dans le même sens ;
- 2° Les objets matériels persistent au cours du temps ;
- 3° Les grandeurs, autres que le temps, qui caractérisent les systèmes physiques, varient en fonction du temps.

Cette dernière définition a pour conséquence de déplacer la grammaticalisation du temps des objets physiques où il est continu et direct vers les "changements que subissent les autres grandeurs physiques de l'univers".

D'où une distinction entre les "propriétés géométriques du temps" (la mécanique classique) et les propriétés qui se rattachent à la "notion d'évolution, déterminant en particulier les propriétés dynamiques des corps" (la mécanique relativiste).

Si on ajoute à cette définition les notions de mémoire, d'anticipation, de finalité ou de but, qui se réfèrent à un temps subjectif abstrait ou virtuel lié à l'action symbolique, on se trouve en présence d'un autre "mixte" fondamental : le temps des vivants et notamment des humains qui détermine les autres par ses interprétations grammaticales des relations entre passé, présent et futur dans un modèle évolutionniste relevant d'une "socio cinétique".

* * *

Dans cette perspective, l'oeuvre de R. Thom apporte des informations essentielles concernant l'ordre spatiotemporel dans la formalisation. C'est à cette épistémologie que nous consacrons les développements suivants portant sur la nature des connaissances possibles. La théorie des catastrophes sera exposée, interprétée et développée! plus loin (Infra VI,3.3,)

Dans Modèles mathématiques de la morphogenèse (Paris, UGE 10/18, 1974 : Chap. I, II, VIII, X) l'auteur pose d'emblée le problème de la morphogenèse cognitive en termes pragmatiques : "Si la Biologie, les Sciences "Humaines", se sont si peu ma thématiques jusqu'à présent, c'est parce que notre compréhension intuitive immédiate des faits biologiques, psychologiques ou sociaux suffit aux nécessités de la vie courante. La science naît du jour où des erreurs, des échecs, des surprises désagréables nous poussent à regarder le réel de plus près". A l'espace-temps de la réalité quotidienne succède alors "l'espace sur lequel apparaissent les apparences d'une morphologie [...] l'espace substrat de cette morphologie. Cet espace sera pratiquement toujours un ouvert d'espace euclidien, comme un domaine de l'espace-temps usuel. En un certain sens, ceci revient à dire que toute phénoménologie doit être regardée comme un "spectacle" visuel. Il y a là, indubitablement, une préséance de la vue sur des sens plus primitifs, comme l'olfaction". C'est dans cet espace substrat que se manifestent "certaines discontinuités qualitatives... Il ne fait guère de doute que la distinction continu-discontinu est à la base de notre perception du monde : c'est elle, si l'on veut bien y réfléchir, qui motive la distinction : Ouvert-Fermé de la Topologie Générale. Elle est bien connue des Gestalt théoriciens qui l'ont introduite avec la distinction classique : Figure-Fond, comme les sémanticiens qui parlent de la Forme et du Contenu. Elle est moins connue en Physico-Chimie, parce qu'on a voulu estomper les différences qualitatives derrière des différences quantitatives".

De plus, les disciplines sont soit "expérimentales" en permettant une intervention de l'homme sur la morphologie, soit "de pure observation" en raison de l'éloignement spatial (astronomie), temporel (histoire), voire de "raisons éthiques" (psychologie, sociologie). Dans cette seconde situation, "on peut admettre que l'observation répétée présente une force convaincante qui n'est guère inférieure, en certains cas, à l'expérimentation. On étendra donc notre modèle aux disciplines non-expérimentales, sans se dissimuler

toutefois, la part d'hypothèse supplémentaire qu'il est nécessaire d'assumer". Cette conception n'est pas sans évoquer les probabilités subjectives et objectives.

Le but de l'explication structurale par rapport aux explications réductionnistes, est résumé comme suit : "On prend la morphologie (X) en elle-même, à un certain niveau d'organisation, comme une combinatoire de champs morphogénétiques. On s'efforce de réduire l'arbitraire de la description du corpus en mettant en évidence ses régularités, ses symétries cachées ; on se donne pour but d'engendrer en quelque sorte axiomatiquement, la morphologie (X) à partir d'un petit nombre de formes types susceptibles d'engendrer de nouvelles formes par agrégation spatiale : l'approche structurale repose ainsi (bien que la chose ait été peu remarquée) sur la possibilité d'introduire entre les champs morphogénétiques des opérations de type algébriques : en fait une véritable algèbre des formes".

Cette logique est aussi décrite comme un rapport entre la topologie et la linguistique à partir de l'opposition saussurienne entre signifié et signifiant qui permet d'y introduire la dimension subjective par référence aux processus neurophysiologiques qui la conditionnent.: "Parmi toutes les activités psychiques de l'homme, il en est une primordiale : c'est celle qui consiste à organiser les données des sens (vue, ouïe, tact) en une représentation de l'espace environnant - contenant le corps comme domaine privilégié dont l'intégrité spatiale doit être au maximum respectée. Une telle représentation de l'espace extérieur n'est nullement liée à la faculté de langage, et elle existe, avec plus ou moins de fidélité et de précision, pour tout animal (et même, en un certain sens, pour le Végétal). C'est donc "la description des processus spatio-temporels ayant lieu dans le voisinage qui a constitué l'une des premières fonctions du langage".

L'homme se trouve ainsi placé au centre du processus cognitif qu'il invente, apprend et utilise, il est l'unique fondement de ce type de connaissance et cela grâce au langage. Dans Paraboles et catastrophes (Paris, Flammarion (Champs) 1983 :154, 115), l'auteur s'exprime ainsi : "En somme, je vois le langage comme la construction d'une sorte d'entité entre le "vrai moi" et le "moi extérieur"("le moi autre") qui est la proie (la proie est une entité aliénante du vrai moi).; pour reconstruire le "vrai moi", pour le maintenir en présence du "moi" aliénant du monde extérieur, le psychisme construit une barrière et cette barrière, c'est justement le langage".

Mais auparavant est cité l'ouvrage de T. Kuhn sur les révolutions scientifiques pour souligner l'importance de l'idée de paradigme qui est "une idée très juste, Un paradigme vit longtemps et survit beaucoup à son efficacité pour des raisons sociologiques. Donc, de ce point de vue, les idées de Kuhn peuvent très bien rentrer dans un schéma de type catastrophiste". Le conflit surgit entre les chercheurs qui travaillent dans le cadre de ce paradigme clos et ceux qui, à l'extérieur, formulent critiques et menaces, créant un "état de crise ou de catastrophe", opérant un "changement de régime qualitatif". Ce qui se passe en fait dans la mathématique par une opposition paradoxale entre le "global" et le "local", comparable au rapport entre une fonction globale et une dérivée en un point localisé

Dans un court article (Logos et Phoenix,1979: 790 sq), l'auteur dénonce la tentative, toujours renouvelée, de faire de la mathématique une expression de la langue universelle, une expression parfaite des

composants du monde réel connaissable, alors que ce que réalise en fait la mathématique, c'est cette opposition entre le "local" et le global.

Le problème posé est la quête d'universalité qui est ainsi présenté dans deux perspectives présentées comme suit.

1) Au point de vue objectif, il s'agit de faire une place de plus en plus importante à l'interdisciplinarité, "ce qu'on appelle l'approche systémique, la théorie générale des systèmes". Les mathématiques traditionnelles ne peuvent répondre à un tel objectif que dans un "petit coin de réalité (mécanique et physique)" dans l'espace-temps. Cependant, des mathématiques plus qualitatives telles que la théorie des catastrophes, peuvent réaliser, par des modèles soumis à répétition ou expérimentation, une jonction entre les "disciplines pures et dures... et des disciplines plus mobiles dans leur théorisation" réalisant extrinsèquement ce que le : langage réalise intrinsèquement : le découpage d'un espace continu en composants environnementaux.

2) Au point de vue subjectif, la problématique se manifeste par un double programme : "redonner vie à la tentative de créer une grammaire universelle", "redonner une actualité au problème (bien oublié depuis Kant) de définir les catégories de l'esprit humain": une grammaire, mais aussi les tropes de la rhétorique (op.cit. 1974 : 238), qui traitent essentiellement des composantes continues et discontinues du langage : ils organisent une syntaxe fondée sur des espaces sémantiques catégoriels : référentiels pour les noms, qualificatifs pour les adjectifs, actifs pour les verbes. "Le langage offre un miroir du monde, non pas un miracle d'harmonie préétablie, mais, en quelque sorte, par construction", par un perfectionnement symbolique des "grandes fonctions régulatrices de la biologie (prédation, rapport sexuel)". Ce sont les logos et les topos! qui permettent ce perfectionnement par complexification progressive dans des espaces diversifiés.

Autre jugement (R. Thom, Prédire n'est pas expliquer, Paris, Eshel, 1991: 125, 134) : concernant les rapports entre langage commun et mathématique, faute d'habitude, "nous vivons le formalisme linguistique et le formalisme mathématique comme deux domaines disjoints de l'activité psychique. Je serais personnellement tenté de dire que c'est le domaine linguistique qui est réellement le domaine fondamental. Le domaine mathématique a un caractère particulier, spécifique, et qui est lié au fond à l'emploi d'images géométriques : la capacité de spatialiser les choses et d'avoir des groupes de transformation agissant dans ces espaces. C'est cela, au fond, l'essence des mathématiques".

Entre cosmos et chaos se situe la zone limitée de l'efficacité du langage. "Le logos existe seulement dans cette zone où règne le danger, mais celui-ci peut être conceptualisé, et donc traité en fonction de connaissances antérieures et, du même coup, neutralisé. Puis, lorsque l'on va un peu plus haut dans l'abstraction, on fabrique des entités linguistiques qui n'ont plus de correspondant dans le réel, qui donc ne nous menacent plus du tout, et cela devient un jeu de langage, de la logique, la tautologie, une certaine philosophie, ou plutôt une certaine épistémologie.

* * *

La modélisation logo logique se place parmi les perspectives théoriques, linguistiques et mathématiques, qui viennent d'être présentées. Elle esquisse le schéma d'une gestion langagière de l'interface entre pensée et réalité, entre champ attractif et cadre référentiel. Cette gestion est fondée sur une grammaire cognitive, au sens large du mot "grammaire", expression de la capacité symbolique du sujet pensant.

I. 3: Composants et liaisons de l'interface langagière (IL)

Un schéma concernant les dualités et les modalités de la mathématisation inter faciale du langage se présente comme une synthèse provisoire des phénomènes reliés aux processus d'intellection et d'idéation illustrés par l'ensemble des textes présentés précédemment.

L'interface est, au sens figuré, une séparation et une relation entre des matières, des activités ou des idées; elle conditionne à cet égard la cohésion et la compréhension d'éléments localisés mais éventuellement unitaires dans certaines conditions. C'est par souci de simplicité et de commodité que nous utilisons ce terme à propos de la fonction épistémique du langage dans un processus cognitif polarisé entre :

-d'une part, des extériorités perçues concrètement, agissantes, évolutives ou stables, impliquant le sujet dans un environnement vécu, perçu et pensé.

-d'autre part, des intériorités centrées sur l'interface langagière opérant des jonctions symboliques entre la pensée, l'esprit, la conscience, l'entendement, l'imaginaire et les percepts, représentations, réalisations spatiotemporelles dans leurs multiples expressions culturelles et techniques prenant place dans un cadre référentiel. D'un côté domine l'abstraction, le formalisme, la logique, de l'autre l'empirisme, l'expérience, le positivisme.

Entre ces divers positionnements, les mathématiques sont conçues comme un langage spécialisé parmi d'autres, constituant un type de liaison entre ces pôles de la connaissance, aboutissant à des constructions formelles et sélectives dans l'inné acquis individuel et dans la connaissance institutionnalisée.

La grammaire cognitive est le fondement de ces relations inter faciales, de leur utilisation et de leur compréhension. "La grammaire est la description complète de la langue, c'est-à-dire des principes d'organisation de la langue" (Dictionnaire de linguistique, Larousse, 1973). De manière plus précise, la grammaire descriptive désigne deux propriétés complémentaires en relation avec la pensée :

- La première concerne son aptitude à l'auto organisation grâce aux métalangages appliqués aux langages, au logos sur le logos, se traduisant par des règles évolutives d'interprétation, de questionnement, de régulation et d'actualisation des connaissances subjectives ou globales ;

- La seconde est la "compétence" concernant la connaissance des règles intériorisées par les sujets et "constituant leur savoir linguistique grâce auxquels ils sont capables de prononcer et de comprendre un nombre

infini de phrases inédites... Cette intériorisation rend compte aussi de l'intuition du sujet... c'est-à-dire de la possibilité qu'a ce dernier de porter un jugement de grammaticalité sur les énoncés prononcés". Précisons qu'il s'agit de leur cohésion interne sémiotique et abstraite et de leur cohérence externe causale et finalisée. Nous verrons que l'acquisition de cette compétence ne va pas sans poser de sérieux problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

Les divers textes présentant le processus d'intellection sous forme d'une dualité fondamentale permettent de réparer, dans une première étape, la fonction cognitive des langages en deux réseaux temporellement opérationnels par recouvrement et conjonction. L'un d'eux constitue un champ abstraitif régulateur que l'on peut comparer à la synchronie et à la syntaxe, orienté plus spécialement vers les formes en extension dans le cas des mathématiques. L'autre situe le langage dans un cadre référentiel plus proche de la diachronie, dénotant ou connotant les éléments d'un environnement composé de choses, d'idées, de communications, d'instruments, de signes, perçus dans une perspective pragmatique et sémantique.

En logologie, les deux réseaux sont considérés comme complémentaires, ce qui conduit à valoriser les modalités organisatrices des langages au niveau le plus général, sans omettre cependant la particularité d'une discipline spécialisée en extension et donc réductrice en intension ; ce qui conduit à repenser le problème des "fondements" des mathématiques entre, d'une part, le formalisme logiciste fondé sur la démonstration de vérités et, d'autre part, une théorisation analogique, relationnelle, probabiliste, herméneutique, mettant en oeuvre des modèles de données en rapport avec des significations. Différents choix épistémiques sont ainsi rendus possibles, qui peuvent être considérés comme autant de théorisations linguistique impliquant des conceptions variées mais complémentaires ou alternatives au sens d'une mathématisation plurielle des langages, ce qu'expriment par exemple les distinctions entre mathématiques pures et appliquées, standard et non standard ; ou encore : au sens d'une diversification langagière d'une mathématique en tant qu'instrument de la connaissance dans un cadre grammaticalement défini à partir de modalités constituant autant de ressources analytiques pouvant conduire à des preuves formelles mais aussi à des formes hypothétiques de compréhension (logiques floues; méta formes : infini, indécidable ; modélisations).

Le secteur du schéma consacré à l'auto organisation grammaticale concerne les constituants linguistiques de cette opération qui seront développés et combinés dans les chapitres ultérieurs. Ces constituants sont interprétés, complétés ou reconsidérés pour tenir compte de la spécificité des langages de la mathématique impliquant des linguistiques idéo figurative, sémiologique; théorétique, projective, socio cinétique.

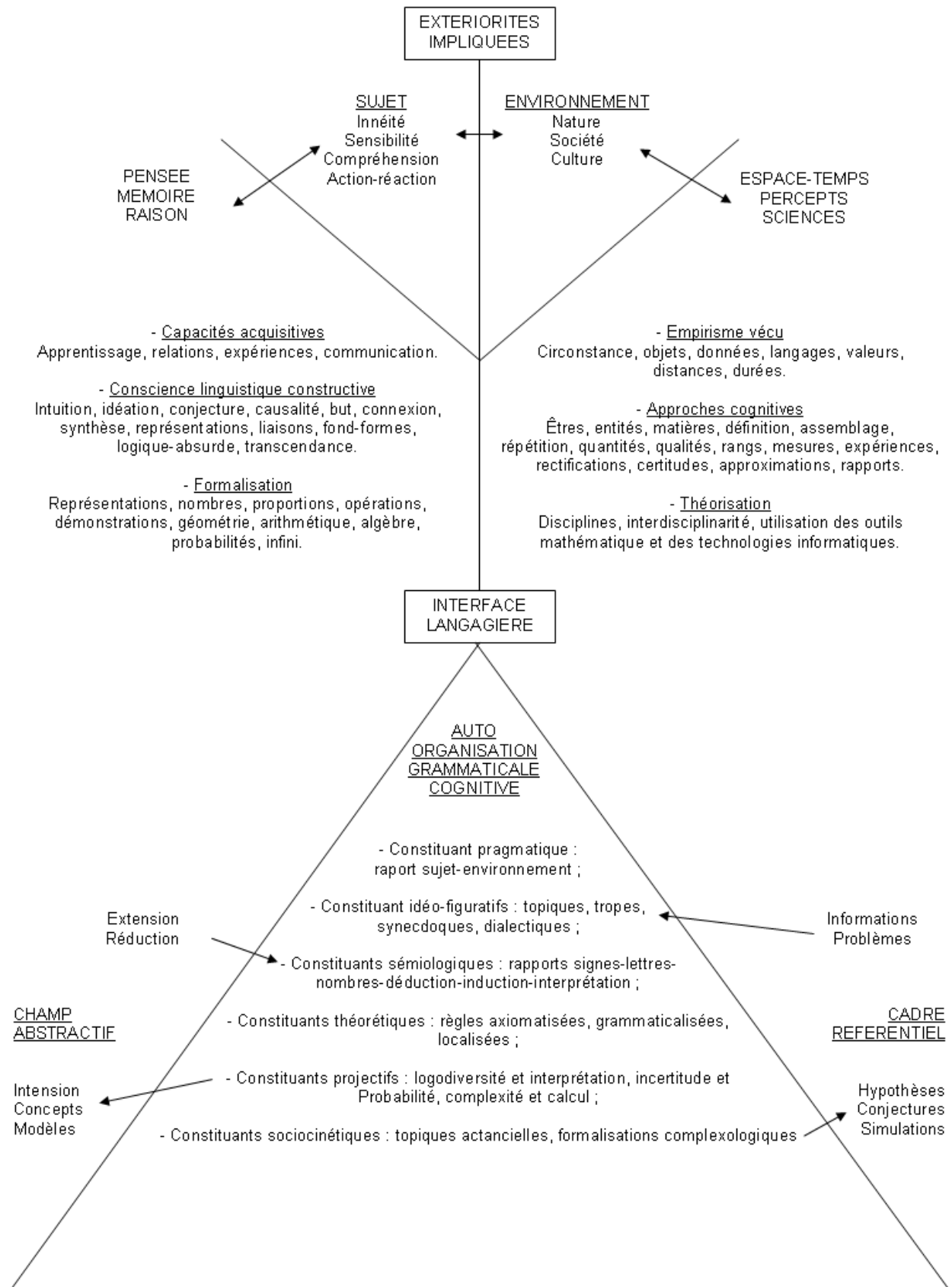
Les constituants pragmatiques fournissent des informations limitées mais significatives sur l'extériorité sectorisée dans le schéma. Ainsi, le sujet est réduit fonctionnellement aux connaissances que l'on peut avoir de ses activités mathématiques dans une perspective neurophysiologique permettant de l' "objectiver" dans un environnement également réduit à des perspectives théoriques, pédagogiques, technologiques évolutives.

Les constituants linguistiques idéo figuratifs développent la conception fondatrice d'une "rhétorique de la pensée" transformée en une linguistique originelle dans le développement des langages mathématiques,

notamment en permettant le passage des liaisons entre les sens des mots aux inférences globalisantes agréées.

Les constituants sémiologiques concernent, outre la sémantique, des situations incitatives : triade peircienne, arbitraire saussurien, rapports intension-extension, fini-continu.

Constituants et circularité de la gestion formelle de l'interface langagière



Les constituants linguistiques théorétiques problématisent la construction des idées générales servant de prémisses à diverses hiérarchisations déductives de règles axiomatiques, logiques, inférentielles non sans connotations normatives communes (vrai faux, évidence-certitude). Cependant, le constituant linguistique réapparaît dans des constructions déviantes, locales ou générales, allant de la contradiction admise à la logique du "flou" et aux abstractions formalisées.

Les constituants par projection se situent dans cette linguistique des localisations et des espaces de connaissance étendus et ouverts où interviennent les mathématiques ordinales et cardinales dès lors qu'elles permettent de renforcer la cohésion conceptuelle et théorique de connaissances concernant plus particulièrement les phénomènes humains voués à l'incertitude, à l'interprétation, à la simulation. Les intentions et les choix du chercheur font alors partie de la modélisation traitant du doute, du questionnement, de l'hypothétique, ou encore : de l'empirie, des focales, des finalités des causes, de l'actualisation.

Les constituants socio cinétiques concernent la connaissance des sociétés humaines dans un espace temporel, symbolique, finalisé.

Ch. II Pragmatique linguistique : communication et conditionnement

La pragmatique linguistique définit des champs d'élaboration de la formalisation à des niveaux très différents à l'origine desquels nous plaçons le sujet pensant entre ses aptitudes innées et acquises, et un environnement illimité par ses possibilités cognitives. Dans ce cadre général, nous présentons ensuite trois effets caractéristiques de trois situations et états de fait : oppositions d'interprétations, problèmes pédagogiques, impacts des technologies.

II. 1. Le sujet entre pensée et réalité

Le sujet, acteur et bénéficiaire du processus cognitif lié au langage et à ses caractéristiques, est au centre de l'investigation. Des théories récentes doivent retenir l'attention par la manière dont elles analysent cette situation l'interprétant à partir de réflexions théoriques et scientifiques allant de l'informatique à la neurobiologie, autrement dit, à la virtualité binaire.

* * *

Le problème est abordé comme suit par H. Simon (The Sciences of the Artificial, MIT, 1969:25, 47-48). La relation interfaciale est définie; " Un être humain pensant : est un système adaptatif, ses buts définissent l'interface entre ses environnements interne et externe... Son comportement reflète sensiblement

des caractéristiques de son environnement (à la lumière de son but) et ne: révélera que quelques propriétés limitatives de son environnement interne - de sa machinerie physiologique qui le rend capable de penser".

Concernant la langue et partant de la position nativiste des théories linguistiques(référence à N.Chomsky et J.J. Katz),rappelant le débat sur la langue universelle, l'auteur aborde le problème de la langue en l'élargissant : "Une position alternative à la position nativiste est que la production d'énoncés et leur compréhension par d'autres dépendent de quelques caractéristiques du système nerveux central de l'homme qui sont communes à tous les langages, mais également essentielles à d'autres aspects de la pensée humaine indépendantes du discours et de l'écoute". Cette seconde interprétation permet d'expliquer "le remarquable parallélisme entre les assumptions sous-jacentes concernant les capacités humaines qui sont incluses dans la théorie linguistique moderne et celles incluses dans les théories de la pensée humaine par traitement de l'information ... Dans les deux domaines, les mêmes classes générales de langages de programmation informatisée se sont révélées commodes pour modéliser et simuler le phénomène".

Dans une Introduction aux Sciences Cognitives (D._Andler (Ed.), Paris, Gallimard (Folio), 1992 : 49 sq), M. Imbert définit ces sciences comme "l'étude de l'intelligence, notamment de l'intelligence humaine, de sa structure formelle à son substratum biologique, en passant par sa modélisation, jusqu'à ses expressions psychologiques, linguistiques et anthropologiques... Le langage, moyen de représentation des connaissances et de communication par excellence, confère à notre espèce des propriétés remarquables et fait du cerveau humain le dispositif le plus intelligent jamais rencontré ou fabriqué... [Sont concernés] "la perception, l'action finalisée, l'organisation conceptuelle, le raisonnement, l'apprentissage, la communication, le langage... autant d'aspects que recouvre le concept de cognition".

Il n'est pas aisé de définir ces nouveaux paradigmes mais les débats que cela suscite sont intéressants et instructifs. Ainsi en est-il, à propos de la nature langagière des mathématiques, de l'ouvrage du neurobiologiste J.P. Changeux (noté désormais JPC) et du mathématicien A. Connes (noté désormais AC) intitulé "Matière à penser" (Paris, Jacob, Points, 1992) apportant également "matière à argumenter" et "matière à interpréter" avec une convergence et une divergence localisées aboutissant à une éthique globale.

La convergence concerne la nature linguistique des mathématiques. Pour JPC, "les mathématiques sont un langage plus rigoureux, ni plus, ni moins". Pour AC, "il est courant et relativement justifié de considérer les mathématiques comme un langage nécessaire à la formalisation de presque toutes les autres sciences. Que cette formalisation soit quantitative ou qualitative, elle se fera toujours à travers les mathématiques... Les physiciens utilisent les mathématiques comme un langage, mais le contenu effectif de leur science ne se laisse pas réduire aux seules mathématiques". Ce qui fait alors la différence, c'est "l'intuition physique".

C'est là une précision importante puisqu'elle illustre différentes fonctions des langages qui ne peuvent être expliquées que si on tient compte d'une spécialisation référentielle (objectivée) par opposition à une spécialisation abstractive (relationnelle). Cette distinction est essentielle en ce qui concerne la gestion mathématique de l'interface langagière ; elle doit être aussi évaluée par rapport à l'idée d'un langage universel

(LU) dont la mathématique pourrait être l'expression la plus convaincante malgré sa diversité et sa fonction évolutive entre pensée et réalité.

Le fondement de la divergence entre les deux auteurs cités réside justement dans la différence entre leurs activités disciplinaires en rapport avec des langages spécialisés dont les motifs et les objectifs constituent deux approches théoriques apparemment contradictoires. Pour AC, l'ordre de grandeur des nombres premiers est, par exemple, une réalité "mathématique" qu'il convient de distinguer de "l'outil de pensée" qui l'explore. Pour JPC, la "réalité" ne peut être que le produit de recherches. En elle-même, elle ne fait que renvoyer à une transcendance appuyée sur des thèses finalistes, un "être tout puissant" ou "un univers rationnel". Il ne s'agirait là que de métaphores aristotéliennes devenues courantes dans les discussions de laboratoire. Ne peut-on dire dès lors que les langages de la mathématique, dans leur fonction cognitive, ont une implication logo logique interprétative sous forme de métalangages commodes, logiques, idéologiques ? Et ce en vue de combler des déficits cognitifs dans l'interface langagière, inspiré par une philosophie de l'esprit de type kantien étudiant la pensée par niveaux (sensibilité, entendement, raison). C'est par la conceptualisation de tels niveaux- clés que AC et JPC esquissent une synthèse entre leurs approches (op.cit.118 sq, 205 sq, 226, 235 sq) .

Pour le mathématicien, l'analogie avec les ordinateurs permet de préciser la définition des niveaux hiérarchisés de l'activité cérébrale. Le premier niveau pour la seule activité mathématique, est le calcul simple tel que le réalise mécaniquement une machine programmée, ce qui est comparé à des "règles" qu'on applique". "Le deuxième niveau commence lorsqu'il y a interaction entre les calculs effectués et une problématique personnelle" relevant des méthodes utilisées, de leur adaptation, de leurs erreurs ou de leur processus. Le troisième niveau est celui de la découverte de connaissances potentielles auxquelles "les connaissances acquises ne donnent pas un accès direct".

Pour le neurobiologiste, le niveau élémentaire est constitué par les neurones et les synapses qui produisent "un influx nerveux impliquant des impulsions électriques et des composantes chimiques". Vient ensuite le niveau des circuits élémentaires spécialisés dans des fonctions vitales particulières : marche, vision... puis, nutrition, accouplement, vol... Le troisième niveau concerne les vertébrés supérieurs et l'homme, c'est celui des "représentations" ou "objets mentaux" permettant la constitution de "codes" pour les actions abstraites ou motrices. Il comprend l'entendement et aboutit à la raison par des règles d'organisation et de stabilisation qui constituent une grammaire où interviennent matière, forme, fonction, sélection. La régulation crée ainsi une liaison fonctionnelle entre les variations extériorisées et la fixation intériorisée. A noter la réflexion suggérée par le paradoxe du Crétois déclarant que tous les Crétois sont des menteurs, créant ainsi une situation d'indécidabilité, autrement dit une inconsistance dans le rapport entre un énoncé (les Crétois menteurs) et un fait (c'est dit par un Crétois), entre une totalité définie en intension et un élément défini en extension. Le théorème de Gödel généralise cette contradiction verbale aux systèmes logiques constitués en intension par des axiomes et la théorie des nombres, du fait de l'incomplétude du rapport intension extension (Infra V.2.2.)

Une dernière question est soulevée par le biologiste à propos du rapport entre la science et la morale envisagées objectivement en ce qui concerne les règles de conduite, l'environnement social à un moment

donné, les effets pervers possibles des recherches scientifiques. L'extériorité ainsi reconstituée dans un espace-temps crée un "relativisme moral ou plutôt cette relativité des morales concordant avec la diversité des langues, des représentations culturelles, des croyances ou droits". Une thèse possible est que la conciliation "du social et du rationnel" est possible pour l'homo sapiens et peut être même située dans le cortex cérébral parmi les "ensembles hiérarchisés et parallèles de neurones contribuant aux fonctions cognitives qui servent à élaborer l'éthique" en laissant une place à la liberté et à l'imagination.

Le mathématicien refuse une telle interprétation idéaliste et platonicienne fondée sur des à priori en fait idéologiques. Un exemple est fourni par l'utilisation de la théorie des nombres par la cryptographie afin de "fabriquer des codes inviolables" pouvant être utilisés aussi bien à des fins nuisibles que pour des opérations utiles et moralement souhaitables. La référence de tout chercheur est une "éthique de facto" dans une "quête incessante de la vérité", impliquant une "responsabilité scientifique" au-delà de la satisfaction que procure la "quête du vrai".

L'interprétation éthique met en valeur les orientations possibles du processus cognitif dans la gestion complexe de l'interface langagière. Les deux disciplines concernées se distinguent formellement par des niveaux d'intellection définis respectivement à partir d'un champ abstraitif pour les mathématiques et d'un cadre référentiel pour la bio neurologie. Ces approches ont en commun la problématisation de l'extériorité impliquée dans le processus cognitif, à savoir : un sujet conscient intervenant dans le développement scientifique en rapport avec un environnement diversifié et évolutif, relevant d'une logologie complexifiée par les finalités subjectives et intersubjectives. Ce qui fait alors défaut dans une perspective machiniste, c'est "un mécanisme d'intégration à un niveau supérieur permettant la reconnaissance d'une harmonie", à l'instar du cerveau favorisant "la résonance harmonieuse du monde extérieur avec le monde intérieur".

La perspective logo logique de la connaissance implique que l'on tienne compte dans la formalisation, de l'intention, de l'information, de l'expérience du sujet, ainsi que des effets de ses actions dans des situations diverses où toute découverte peut se révéler utile ou nocive dans ses effets (qu'il s'agisse de la cryptographie, du nucléaire ou de la génétique). Le temps joue un rôle essentiel dans la prise de conscience des conséquences humainement inacceptables ou juridiquement condamnables impliquant des règles recevables et adaptables, constitutives de modèles. Les économistes sont en quête de telles règles entre l'équilibrage des marchés et le pouvoir des Etats, or le calcul des probabilités est toujours présent dans de telles situations où il s'agit autant de maximiser les gains que de minimiser les pertes comme dans le pari théologique de Pascal. Nous verrons également que la théorie des jeux introduit une modélisation formelle dans l'analyse des conflits impliquant des acteurs, des enjeux, des informations, des communications pouvant, entraîner la modification de stratégies par des calculs valorisant la négociation et la conciliation en fixant des limites factuelles ou contractuelles. C'est ainsi que la guerre froide a pu être transformée en paix atomique, puis en compétition techno économique pacifique pour aboutir à une solution pacifique (Infra VII.3.2). En bref, il s'agit dans ces cas de permettre aux sujets de reprendre leur place dans la formalisation en tant que "matière" à être pensée et recomposée dans les liaisons inter faciales toujours révisables et perfectibles.

Les techniques actuelles de la neurophysiologie permettent de concevoir la liaison entre intériorité et extériorité comme un enchaînement d'étapes psychologiques allant d'une localisation cérébrale définissable graphiquement sous forme de "cartes" d'une pensée exprimée physiquement par des langages. Il s'agit ainsi de repérer une activité symbolique constituée par un ensemble complexe de liaisons et de réseaux établissant une connexion "harmonique" entre subjectivité et objectivité vécues comme telles.

Les langages de la mathématique sont également activés par certaines règles opérant dans certaines aires. Ainsi, une recherche par TEP (topographie d'émission de positons) portant sur les différences possibles entre les "images" de la pensée mathématique chez des hommes et des femmes de même niveau dans cette discipline, révèle des écarts sensibles entre les circuits neuronaux suivant le sexe. Les aires cérébrales activées changent quant à leur étendue et à leur intensité énergétique : elles impliquent notamment moins d'effort chez les femmes que chez les hommes. D'où l'on peut déduire l'existence conjointe et synergique de signes neuronaux (repérés par TEP) et de symboles mathématiques perçus et traités visuellement sur documents par les sujets (Newsweek, March 27, 1995₁; M. Raichle, La visualisation de la pensée, Pour la Science, Juil. 1994 : 12 sq)

D'autres recherches faites par IRM (Imagerie par résonance magnétique fonctionnelle) font apparaître une caractéristique importante de la capacité symbolique formelle qui se diviserait en "deux systèmes complémentaires qui seraient en jeu lors qu'on fait des calculs". Le premier - lié au langage, localisé sur le lobe frontal inférieur gauche - traiterait des calculs symboliques exacts et stockerait les tables d'opérations qui sollicitent la mémoire. Le second - lié à la vision, localisé dans la zone des deux lobes pariétaux inférieurs - traiterait, de manière analogique et comparative, les calculs approchés à la manière d'une règle qui mesure par comparaison linéaire des quantités référencées.

Est aussi montré, par des épreuves bilingues, le rôle de la représentation verbale des nombres et de l'audition dans le calcul exact : "les nombres sont appréhendés sous forme symbolique et le nombre 9, par exemple, est stocké sous la forme du symbole "9" ou du mot "neuf". Le système est dit symbolique (ou formel)". Les mathématiques exactes apparaissent dès lors comme la manifestation du champ abstraitif, l'un des secteurs de l'interface langagière où dominent les circuits orientés vers le calcul et l'exactitude ainsi repérés, dans les langages formels. Les mathématiques approchées empruntent un autre circuit cognitif se manifestant dans le cadre référentiel où domine la mesure au sens large : évaluation approximative et appréciation de voisinage, juxtapositions de lignes dans des formes et des circuits, concrétisations intuitives comme dans le comptage par les doigts (La biologie des maths, Science et Vie, 984, Sept. 1999: 46).

La nature expérimentale de ces connaissances justifie leur prise en considération dans les constituants pragmatiques des langages. Sont mis en valeur leurs faces physiologique et abstractive ainsi que leur complémentarité dans l'interface langagière sous forme de systèmes centrés l'un sur le calcul l'autre sur la mesure. L'idée d'une liaison neuronale rend cohérente et plausible une interprétation de la fonction cognitive du langage mathématique. Reste à compléter le constituant pragmatique par les interférences environnementales.

Les constituants pragmatiques des processus cognitifs sont nombreux et changeants. On ne peut que proposer des illustrations de telles situations par des études de cas limités mais significatives concernant les perceptions des disciplines mathématiques dans des situations diverses et évolutives. Seront présentés successivement dans cet esprit : les oppositions d'idées et d'arguments concernant la nature de cette matière, les problèmes posés par son apprentissage et son enseignement, l'impact des technologies et notamment de l'informatique sur son développement.

II.2. Oppositions d'idées : entre raison et inventivité

Dans Rhétorique I, Trad., Paris, Les Belles Lettres, 1967), Aristote situe la mathématique par rapport à ce qui, "dans chaque cas, peut être propre à persuader". A côté des preuves techniques concernant la communication à savoir : "le caractère de l'orateur", "les dispositions où l'on met l'auditeur", prend place "ce que le discours démontre ou paraît démontrer". La connaissance certaine est alors un aboutissement et un dépassement de l'effort de persuader. "Plus l'on s'efforcera d'organiser la dialectique ou la rhétorique comme on ferait non pas de disciplines pratiques, mais de véritables sciences, plus l'on en fera, sans s'en apercevoir, disparaître le caractère naturel, et plus on les transformera ainsi, l'on empiètera sur des sciences ayant pour matière des objets déterminés et non plus seulement des discours".

Dans Organon V (Les topiques, Paris, Vrin, 1974). le rôle du substrat langagier de la connaissance est approfondi à partir de concepts tels que le syllogisme érigé en "démonstration quand [il] part de prémisses vraies et premières;" Par contre, "est dialectique le syllogisme qui conclut de prémisses probables. Les "topos" ou "lieux" sont les classes (genres, types, espèces) qui organisent la création cognitive à partir de définitions préluces des prémisses. Les tropes jouent un rôle important dans ces définitions : "la métaphore ne va pas sans procurer une certaine connaissance de la chose signifiée... [par] quelque ressemblance évoquée par l'utilisation des mots qui permet de passer à l'idée de relation, autre étape critique de la connaissance (utilisant éventuellement la métonymie et la synecdoque).

La démarche pour définir un terme complexe est différente car il faut procéder à une évaluation des composants de cette définition. Par exemple, on peut définir "la ligne droite finie comme étant la limite d'une surface, pourvue de limites et dont le milieu est dans l'alignement des extrémités. S'agissant de la ligne droite infinie, elle n'a ni milieu ni limite, et pourtant elle est droite". Ce dernier terme ne suffit donc pas à définir le concept de ligne ainsi posé de manière restrictive. La définition de l'expression "avoir un milieu" conditionne la définition du terme complexe "ligne" comme elle conditionne celle de "nombre pair".

Le traitement de la complexité définitoire dans les démonstrations formelles faisait ainsi son entrée dans les langages de la mathématique, tout comme le syllogisme annonçait la problématique de la déduction et de l'induction constitutives des axiomatiques à venir et comme les tropes et les topoï attiraient l'attention sur des formes et des relations sous-jacentes de l'idéation.

Dans la Critique de la raison pure (Tomes I et II, 1781, 1787, (trad.) Paris, Flammarion, 1934), Kant nous offre une excellente entrée en matière en posant le problème de la mathématique dans une perspective philosophique qui se révèle plurale et sujette à débat. Dès la préface (I: 18-19), cette discipline est présentée comme une "connaissance théorique de la raison" devant déterminer à priori son objet "d'une façon . entièrement pure", ce qui n'est pas le cas de la physique. "La mathématique, dès les temps les plus reculés où puisse remonter l'histoire de la raison humaine, a suivi chez l'admirable peuple grec, la route sûre de la science... cette route royale". La paternité de cette "révolution intellectuelle" est attribuée à Thalès dans sa démonstration du triangle isocèle car "il trouva qu'il ne devait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure, ou même au simple concept qu'il en avait, mais qu'il devait engendrer, construire [cette figure] au moyen de ce qu'il pensait à ce sujet et se représentait à priori par concepts, et que, pour connaître avec certitude une chose à priori, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui dérivait nécessairement de ce qu'il y avait mis lui même, en conséquence de son concept". Notons l'ambiguïté de la liaison entre à priori et concept que l'on retrouve à propos de la spéculation rationnelle quand la mathématique rejoint, dans certaines limites, les questionnements de la raison pure que suscite la métaphysique traitant de concepts tels que "Dieu, la liberté, l'immortalité", abordés librement et avec assurance, de manière dogmatique, sans se préoccuper s'ils sont ou non solubles dans la sphère de la raison qui permet de passer des constructions à priori aux fondements solides (I: 40-42). Curieusement, Kant (II: 220,302) problématise cette approche de la mathématique dans une critique nuancée adressée aux mathématiciens qui; ont "à peine philosophé" sur leur discipline, une "oeuvre difficile permettant de distinguer les différents usages de la raison". " Des règles vulgaires, tirées de la raison commune, leur [tiennent] lieu d'axiomes", alors qu'ils "ne s'inquiètent 'Pas de savoir d'où ont pu leur venir les concepts d'espace et de temps dont ils s'occupent (comme les seuls quanta primitifs) ... Autrement dit, ils se laissent glisser peu à peu du champ de la sensibilité sur le terrain mal assuré des concepts purs et même transcendants..." Cette dérive vers "les attrayantes contrées de l'intellectuel" est un "leurre" rattaché à une "espérance fantastique", c'est alors qu'intervient le langage (qui n'est pas mentionné par l'auteur) par lequel se définissent les "limites" de l'abstraction dénoncée par la "méthodologie transcendantale" en ce qui concerne notamment les mathématiques.

En voici la preuve : "la solidité des mathématiques repose sur des définitions, des axiomes et des démonstrations".

Les définitions mathématiques ne peuvent jamais être fausses. En effet, comme le concept est d'abord donné par la définition, il ne contient que ce que la définition veut que l'on pense par ce concept. Seule la précision ou la simplicité peut faire parfois défaut comme lorsque l'on définit la circonférence comme "une ligne courbe dont tous les points sont également éloignés d'un point unique".

Les axiomes sont des principes synthétiques à priori, qui sont immédiatement certains... Les mathématiques au .contraire [de la philosophie] sont susceptibles d'axiomes parce qu'en construisant les concepts dans l'intuition de l'objet, elles peuvent unir à priori et immédiatement les prédicats de cet objet, par

exemple, qu'il y a toujours trois points dans un plan". Ainsi, l'intuition fonde la certitude des concepts et des axiomes sur l'évidence à priori des attributs d'un objet.

"Il n'y a que les mathématiques qui contiennent des démonstrations parce qu'elles ne dérivent pas leurs connaissances de concepts mais de la construction des concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée à priori comme correspondant à ces concepts". C'est ce que fait la méthode algébrique lorsqu'elle tire des équations "par réduction la vérité en même temps que la preuve; par construction, à l'aide de signes", ou par représentation des "concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des grandeurs". Ces synthèses du processus de cognition formelle seront par la suite développées ou simplifiées dans des logiques, des théories, des modélisations.

* * *

Le positivisme d'Auguste Comte se fonde sur une interprétation réaliste de la fonction cognitive du langage comparée à l'interprétation "théologico-métaphysique" (La science sociale, catéchisme positiviste, Paris, Gallimard, Idées, 1972). Dans cette opération intervient le constituant abstraktif car "c'est surtout à la religion que le langage doit être directement comparé puisque l'un et l'autre se rapportent spontanément à l'ensemble de notre existence". Leur fonction de régulation sociale s'accomplit d'après "deux sources naturelles, l'une morale qui dirige, l'autre intellectuelle qui assiste, complète et développe". Le passage de l'une à l'autre se fait, dans une perspective évolutive lamarckienne et darwinienne, par la reconnaissance de "la nature profondément sociale du langage humain" dans ses dimensions culturelles et biologiques impliquant tous les êtres vivants utilisateurs de signes : "langages d'action" chez les animaux, "langage volontaire et perfectible chez les humains", pour le motif qu'un tel langage se perfectionne graduellement suivant des étapes bio culturelles successives causées par des impulsions intérieures et des influences extérieures qui déterminent sa formation. C'est ainsi que le langage devient un instrument de la construction d'un monde humain dans une perspective positiviste.

La mathématique se positionne par rapport à ce conditionnement pragmatique en tant que science originelle et abstraite de la Cosmologie ou "étude de la terre" dont la science concrète est la physique. Sa précision en fait une "science unique", une "science des sciences en tant qu'instrument de la science simple de l'ordre matériel extérieur qui est la physique. Les sciences plus compliquées consacrées à l'ordre humain plus élevé (biologie, sociologie, morale) exigent que la déduction réductrice fasse une place importante à l'induction spéculative, passant par étapes de la "généralité objective" à une "généralité subjective" historiquement enrichie. La connaissance change donc d'expression et de signification suivant la nature de son objet et le perfectionnement du langage pouvant conduire à une démonstration mathématique en rapport avec une description modélisatrice : une dualité épistémique qui va se révéler une constante.

* * *

Antoine Cournot (Essai sur le fondement de nos connaissances, tomes I et II, Paris, Hachette, 1851) introduit une nouvelle dimension, la probabilité, dans le support langagier de la science ; elle est présentée non

pas en rapport avec la précision des mathématiques ou la crédibilité des sciences appliquées, mais eu égard à la subjectivité impliquée par l'utilisation des langages à la base des connaissances. L'objectivité relative de celles-ci est définie, comme chez Comte, par une "classification synoptique des connaissances humaines" réparties dans trois séries allant de la spéculation à la pratique, de l'abstraction au concret, des lois permanentes aux enchaînements de faits relevant d'une causalité plus ou moins parfaite, cosmologique ou historique.

C'est à ces différents niveaux que Cournot (II, chap. 14 à 17) analyse l'impact du langage, posant ainsi les bases d'une linguistique de la formalisation. La définition, la logique, tout comme la probabilité, sont des représentations et des raisonnements rendant accessibles les différents signes et expressions employés dans un cadre naturel et idiomatique de nature syntaxique. Est aussi mentionnée la discordance entre la nature discontinue des signes obligés de tenir compte de l'évolution de l'environnement et la permanence des idées définies abstraitement ce qui est une, 'manière de tenir compte des changements sémantiques et référentiels. Ce sont "les règles syntaxiques pour la combinaison des signes" qui permettent d'établir "une forme aussi ingénieuse que simple [qui] produit tous les avantages attachés à l'emploi de notre arithmétique". La plasticité dénotative des langages quels qu'ils soient exclut l'idée d'une langue universelle telle qu'avaient pu l'envisager les philosophes, notamment Leibniz; de même, elle exclut une perfection qui deviendrait trop réductrice. C'est ce qu'illustre la sémiologie des nombres irrationnels. "Les géomètres sont dans l'usage de désigner par la lettre π le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, rapport que l'on ne peut pas exprimer en chiffres, quoiqu'on puisse approcher de la vraie valeur d'aussi près qu'on le veut". C'est aussi vrai des mots "hypoténuse" et "ellipse" ou encore des "artifices" des algébristes. A la base de cette réflexion, on retrouve une perspective kantienne de l'ordre logique qui polarise l'ordre logique vers l'abstraction et la transcendance d'un infini dont les mathématiques fournissent les exemples les plus nets. "En toute matière, la distinction vraiment essentielle est celle qui consiste à opposer à la preuve logique ou démonstrative l'induction philosophique... Elle procède selon les cas, tantôt par déduction ou par induction, du connu à l'inconnu, selon qu'il y a plus ou moins de généralité dans la vérité connue que dans la vérité inconnue ; tantôt par une marche inverse, elle justifie les prémisses hypothétiques en retombant sur des conséquences connues..." Le mot "construction" est employé pour désigner cette multitude de cas illustrant les utilisations virtuelles des langages

* * *

Dans Le pragmatisme (1907, trad. Introd. H. Bergson, Paris Flammarion, 1918, Leçons 2, 5, 6) W. James se présente comme un "pragmatiste radical"... "tournant le dos résolument et une fois pour toutes, à une foule d'habitudes invétérées chères aux philosophes de profession... [à] tout ce qui est un soi-disant absolu ou une prétendue origine, pour se tourner vers la pensée concrète et adéquate, vers les faits, vers l'action efficace". "Une théorie devient [alors] un instrument de recherche, au lieu d'être la réponse à une énigme et la cessation de toute recherche".

Ce sont les sciences qui ont fait "naître cette idée que la plupart de nos lois, toutes nos lois peut-être, sont de simples approximations... [Les théories] ne sont qu'un langage inventé par l'homme, une sténographie

conceptuelle, comme l'on dit, un système de signes abrégés par lesquels symboliser nos constatations sur la nature : les langues, tout le monde le sait, admettent une grande liberté d'expression et comportent de nombreux dialectes. Cette conception relativiste des vérités explique la tolérance et l'esprit "démocratique" du pragmatisme : par exemple, dans le domaine religieux, il se distingue autant de "l'empirisme positiviste" et de son parti pris antithéologique que du "rationalisme religieux" trop limité à la transcendance et à l'abstraction. Une idée ne peut être vraie que d'une "vérité instrumentale", vraie à titre d'instrument, et seulement à ce titre.

Les mathématiques sont l'expression la plus parfaite de cette vérité, elles illustrent également la continuité et le perfectionnement des idées et des théories dans le temps. Ainsi en est-il de la géométrie analytique élaborée par Descartes inspiré par les figures euclidiennes, d'où est résulté "un moyen absolument différent, incomparablement plus puissant, d'opérer sur les courbes". Le processus cognitif est résumé comme suit à partir d'un topique conceptuel: "Généralement nous commençons par construire un système de concepts que nous classons, que nous disposons par séries ou entre lesquels nous établissons n'importe quelles liaisons intellectuelles... Assigner à une impression une place qu'elle puisse occuper dans [ce système], c'est la rendre intelligible". Cette notion de "répertoires parallèles [jugée] maintenant en mathématique, en logique, se substitue de plus en plus aux anciens systèmes de classification". En voici les termes clés : chose, même ou différent, genres, esprits, corps, temps, espace, sujets, attributs, inférences causales, imaginaire, réel.

Suit la vérification qui fait apparaître la théorie pragmatiste de la vérité comme' évolutive et changeante lorsque les vérités relatives du passé se trouvent dépassées par des expériences plus récentes à la base de croyances mieux fondées car "confirmées par la réalité sensible à laquelle s'ajoute une "chose" pour l'interpréter. Ainsi, "la pleine réalité d'une vérité tient toujours à quelque travail de vérification où s'incarne, en y fonctionnant, la faculté abstraite d'établir entre des idées et des objets certaines liaisons qui sont vraies". La vérité passe alors de la puissance à l'acte.

* * *

Dans La science et l'hypothèse (1906, 1943, Paris, Flammarion : 16 sq, 91 sq) Poincaré développe l'idée d'une polarité du sens mathématique dont la nature, dans la théorie des nombres et l'arithmétique explicite les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité. La base est "le raisonnement par récurrence [qui] contient, pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes" du type : "un théorème vrai pour 1 est également vrai pour 2, il l'est pour 3, etc... jusqu'à sa mise en échec par l'infini". D'un autre côté, les géométries non-euclidiennes font apparaître que les axiomes ne sont que des "définitions déguisées" renvoyant à des "conventions" exprimant des degrés de liberté. "Notre choix parmi toutes ces conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux, mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction".

La perspective théorique de la connaissance mathématique est définie à nouveau sous une forme langagière duale et harmonisée entre abstraction et référence au réel. La géométrie ne serait que l'étude des mouvements des solides ; mais elle ne s'occupe pas en réalité des solides naturels, elle a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables, qui n'en sont qu'une image simplifiée et bien lointaine. La notion de ces

corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir". De même, la notion de "groupe" impliquant une organisation interne définissable par des règles est une "forme de notre entendement". Parmi tous les groupes possibles, il faut choisir "l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels".

Cette conception souple, à la fois pragmatique, stratégique et réversible du processus cognitif mathématique met en évidence la richesse du langage impliqué et l'importance des choix faits par le sujet. La rigueur logique et la norme axiomatique ne sont pas ignorées pour autant.

* * *

De B. Russell (Introduction à la philosophie mathématique (1919, trad., Paris Payot 1970 : Chap. 1-5, 28) nous retiendrons sa conception des définitions formelles et de la logique en tant qu'expression mathématique.

Concernant le premier point: "En cherchant une définition du nombre, la première chose à bien éclaircir est ce que nous pouvons appeler la grammaire de notre enquête. Beaucoup de philosophes en essayant de définir le nombre tentent en réalité de définir la pluralité, ce qui est tout à fait différent. Le nombre doit être caractéristique des nombres comme un homme est caractéristique des hommes". La grammaire de l'enquête comporte trois éléments définitoires : l'énumération infinie, l'analogie avec l'infini des "choses du monde, l'infinité possible des nombres doit être en compréhension ou intension en tant que propriété. Définition proposée : "Le nombre est une façon de grouper certains ensembles (couples, trios...) laquelle suppose des opérations de numération dans un ensemble fini exprimé par des rapports du type "un à un", "un à plusieurs", "plusieurs à un"... Avec l'algèbre, nous entrons dans le domaine des fonctions propositionnelles utilisant des symboles indéterminés "tels que lorsque des valeurs leur sont assignées l'expression devient une proposition". Métaphoriquement, une telle fonction peut être considérée comme "un simple croquis, une enveloppe, un vase destiné à recevoir une signification". Le principe est celui d'une équation à une variable qui devient "vraie" quand x prend la valeur de la racine de l'équation.

La base de ces opérations est constituée par une "logique qui est devenue plus mathématique et les mathématiques qui sont devenues plus logiques... et il est devenu impossible de tracer une ligne de démarcation entre les deux". Le point commun est l'abstraction symbolique : "les propositions logiques sont celles que nous pouvons connaître à priori sans étudier le monde réel. Elles viennent à notre connaissance par une "expérience sous-jacente du réel". Le motif majeur de cette interprétation est la nécessité de se libérer d'un "langage trompeur" et de construire un symbolisme logique que l'on peut considérer comme un langage de substitution et de perfectionnement orienté vers une spécialisation accrue. Principalement, l'incertitude et le flou du langage commun peut être ainsi transformé en "formes et seulement pour constater qu'elles sont vraies toujours ou quelquefois, en permutant "toujours" et "quelquefois" de toutes les façons possibles. Mais cette traduction en constantes et en variables n'est pas toujours possible en logique! D'où ce constat conclusif :

"Nous avons trouvé, pour les propositions mathématiques, un critérium nécessaire mais non suffisant. Nous avons suffisamment défini le caractère des idées primitives, permettant de définir toutes les idées

mathématiques, mais pas le caractère des propositions primitives d'où toutes les propositions mathématiques peuvent être déduites. Il y a là une question assez difficile à laquelle on n'a pas encore pu faire une réponse précise. Par exemple, l'axiome de l'infini "quoique possible à énoncer en termes logiques, ne peut pas être affirmé comme vrai par la logique".

* * *

II. 3. Problème pédagogique. : échec, questionnement

Le problème pédagogique posé par les mathématiques apparaît comme une constante qui contribue à éclairer leur nature et leur particularité linguistiques.

Une "enseignante expérimentée", S. Baruk (Echec et maths, Paris, Seuil, "sciences", 1973 : 5-11, 307 sq) considère que "ce qu'il faut en premier, c'est diminuer et réduire à son minimum la pression intolérable qu'exerce sur tout enfant d'âge scolaire l'enseignement des mathématiques" dont la situation critique" suscite une critique pragmatique et subversive des dogmes et des systèmes. "L'échec fonctionne ainsi, en définitive, comme révélateur de structures". Il s'agit avant tout "de s'interroger fondamentalement sur le statut d'enfance attribué à l'enfant, sur le statut "mathématique" attribué aux mathématiques, sur la relation que l'on a au savoir, [ce qui] ne peut se faire que hors pédagogie". Plus précisément, chercher une explication à l'échec revient à prendre en considération "l'inaptitude à exercer une activité purement intellectuelle et détachée de tout contexte historique et social" ; ce qui heurte l'idée d'une "normalité mathématique", et ce qui rappelle le perfectionnisme qui place cette mathématique au sommet des activités intellectuelles les plus pures, non sans susciter des réactions hostiles.

Dans une postface de 1981, l'auteur note la persistance de cette tendance aggravée par l'introduction des "maths modernes" (théorie des ensembles). L'échec est toujours présent et accepté comme venant sanctionner des "enfants intelligents, sensibles, travailleurs, et dont l'intelligence fonctionne partout sauf en maths". Les réformes axées sur des "objets mathématiques" sans relation avec la vie individuelle et sociale, rendent difficile et aléatoire le processus d'apprentissage qui est également créateur car le "sujet apprenant contribue à révéler la nature des mathématiques et celle des relations très particulières qu'entretient avec elles le sujet vraiment mathématisant... à savoir des relations fortement chargées de plaisir sinon de jouissance". Ce sujet ne se repère que par "ses erreurs et ses questions" relevant certes d'un "psychisme plongé dans une matière".

Conclusion de 1986 : "Ce que je savais être une pratique de réparation de l'échec s'avère être tout simplement une pratique d'initiation à un savoir qui aurait du sens. Et cette pratique... a pour pivot la prise en compte et l'analyse des erreurs"

* * *

Le problème est repris dans un ouvrage collectif édité par D. Tall (Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Boston, Kluwer, 1991). La rigueur formelle 'érigée en idéologie par les enseignants se voit opposer

une prise en charge de la capacité d'apprendre par un groupe étendu où la communication pédagogique autant que la diversification des approches et des méthodes deviennent primordiales mais également contestables.

"Ironiquement, dans une discipline vantée pour sa précision, l'étudiant en mathématiques doit développer une tolérance pour l'ambiguïté. La pédanterie peut être l'ennemie de l'intuition. Parfois une explication est plus efficace si elle est imagée, ouverte, par un exemple ou une analogie... En même temps, s'il y a un risque certain qu'une erreur puisse être commise, l'étudiant doit apprendre à devenir conscient de l'imprécision et à appliquer le niveau nécessaire de rigueur. C'est cet élément de jugement dans le raisonnement, si important dans l'éducation mathématique, qui doit être communiqué à cet étudiant" (G. Hanna, op.cit. : 54 sq).

Une autre contribution met en évidence les difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre d'une "ingénierie didactique" efficace pour enseigner des concepts aussi fondamentaux que celui de "fonction" qui prend métaphoriquement des sens différents dans une variété de contextes : diagrammes fléchés, tables, descriptions algébriques, entrée-sortie de boîte noire, paires ordonnées, etc..." Un tel concept apparaît généralement dans les revues et les traités sous forme de pages de symboles et de formules qui exigent le plus souvent un gros effort de compréhension. "La perte de sens due au processus intellectuel d'abstraction mathématique... est un problème général pour les étudiants, pourtant l'abstraction est tout ce que sont les mathématiques selon Hilbert, les broukistes, et la plupart des professeurs d'université", ce qui provoque de nombreux échecs. L'ironie de cette situation est que "l'anxiété matheuse frappe tout individu et même les enseignants de la discipline". Ainsi se trouve posé le problème des signes récurrents né de la suite de dénominations et connotations qui créent des significations abstraites complexes. L'explication proposée est que "la fonction et les notions associées ne sont pas conçues visuellement et que cette approche non visuelle empêche le développement que le sens des fonctions peut prendre chez certains". (Eisenberg, op. cit.: 140 sq).

La synthèse de D. Tall (op. cit.: XIV-XV) insiste sur les points suivants. La participation de l'étudiant à un "débat scientifique" excluant la passivité et impliquant des "conflits" à propos d'éventuels développements théoriques novateurs. La construction des bases intuitives pour les "concepts mathématiques avancés" à partir d'un équilibre entre l'environnement des connaissances et l'appréciation du développement logique. La visualisation des opérations, grâce notamment à l'utilisation des ordinateurs, donne une idée plus générale des concepts et des méthodes plus souples pour le traitement de l'information car l'utilisation de la programmation oblige à penser les processus mathématiques d'une manière éclairée par l'abstraction.

* * *

D'autres ouvertures pédagogiques sont envisageables à partir d'autres perspectives théoriques : citons la théorie de la communication et celle des fractales.

C...Shannon et W. Weaver (The Mathematical Theory of Communication, Chicago, Univ. of Illinois Press, 1949 : 8sq, 31 sq) nous offrent une illustration probabiliste d'utilisation possible d'une opération de désémantisation interprétable de l'information. "Le mot 'information' est utilisé dans cette théorie dans un sens

spécial qui ne doit pas être confondu avec son emploi courant. Notamment, 'information' ne doit pas être confondu avec 'sens' [meaning]... Ce mot n'est pas tant lié à ce qui est dit qu'à ce qui peut être dit... [11] est la mesure de la liberté de choix quand on sélectionne un message". Ainsi, "les aspects sémantiques de la communication ne concernent pas ce problème d'ingénierie" qui ne traite un message que comme "une sélection d'un ensemble [mesurable] de messages possibles". Le référent est ainsi déplacé d'une affirmation avec sens à une possibilité d'émettre tel message plutôt que tel autre également possible. Par exemple : telle lettre d'un alphabet, tel signal ou telle séquence temporelle... Nous verrons qu'alors le contenu sémantique n'est pas supprimé mais exprimé et conditionné par une modélisation formelle et conceptuelle, tout en étant conscient des erreurs et des tromperies toujours à craindre lorsque les données sont invérifiables (S. Ullmann, Semantics. An Introduction to the Science of Meaning, Oxford, Blackwell, 1983: 253 sq).

La géométrie fractale de B. Mandelbrot (Les fractales à l'école ? Pour la science, 220 bis, fév. 1996: 3) offre une approche plus concrète mettant en rapport la réflexion, le questionnement et un contexte "à la fois compliqué et visuel", en bref, "le statut d'un style de pensée" attrayant pour les enfants, constituant donc une alternative possible à certaines mathématiques dures. Ainsi, "une autre possibilité se présente : ne pourrait-on pas essayer de vivre [les mathématiques] sans système, de donner la parole aux enfants et les suivre: dans l'attraction qu'ils paraissent éprouver pour les fractales ?" Celles-ci "en tant que discipline offrent justement un moyen d'aborder le problème de la visualisation en tant qu'ouverture sur les mathématiques abstraites. Alors l'anxiété disparaît dans le traitement des mathématiques plurielles et diffuses : "les algorithmes des montagnes fractales et de l'ensemble de Mandelbrot se prêtent au rêve et au jeu créateur"; Le rôle de l'informatique en tant que "nouveau débouché et voie nouvelle" pour l'enseignement des mathématiques est également souligné à cet égard.

II.4 . L'impact des technologies : l'informatique

Le lien entre calcul et technique n'est pas nouveau : il remonte aux abaques à jetons, aux bouliers jusqu'aux calculatrices mécaniques ou électriques. Il est cependant incontestable que l'ordinateur présente des caractéristiques qui le distinguent radicalement des instruments antérieurs quant à ses effets pragmatiques sur les langages de la mathématique. La "machine à penser" de Turing est ainsi fondée sur une logique coordonnant simultanément des nombres et des opérations dans un système binaire (0-1) avec un traitement matériel lui permettant de lire, d'écrire et de déplacer, ce qui est effectué mécaniquement sur des bandes de papier divisées en cases qu'elle peut faire avancer sans limite ou reculer en sens inverse avec une limite. La machine comporte également un système interne (S) qui lui permet d'interpréter une case de départ et de la programmer. Ainsi, " $SO \rightarrow + 1S$ " est un ordre qui permet de déclencher une suite infinie "010101..." ; alors que " $S1 \rightarrow OS$ " fournit la suite "101010...". La numération binaire est ainsi rendue opérationnelle pour la solution de problèmes suivant des algorithmes préétablis et dans des suites récursives indéterminées (cette possibilité constituant une définition à rapprocher de la métamathématique de Gödel pour la démonstration de ses théorèmes, (Infra V.2.2.2.)

Cette "machine" a été construite à partir des travaux de Goldstein et Von Neumann qui présentèrent en 1947 un programme enregistré, structuré logiquement, adaptable à des machines performantes grâce à l'électronique. Ainsi est lancé un projet d'étude et de recherche centré sur le rapport entre deux expressions de l'information : un mode de présentation des nombres et des symboles impliquant un support algorithmique lequel doit être programmable sur un support matériel. Une nouvelle conception de la pensée mathématique allait se déployer et s'enrichir.

* * *

L'intelligence artificielle (IA) devait connaître deux formulations, l'une "forte", l'autre "faible". Dans la "forte", le problème était résolu par une identification des intelligences biologique et mécanique dans la continuité de la théorie des artefacts de H. Simon (op.cit.:26) qui considérait les réflexions et les résolutions de problèmes comme des "comportements artificiels appris et susceptibles d'améliorations par l'invention de meilleurs projets" impliquant une "psychologie comme science de l'artificiel". Cette conception est précisée par R. Schank et R. Abelson (Scripts, Plans, Goals and Understanding. An Inquiry into Human Knowledge Structures, New-York, Wiley, 1977). Dès l'introduction, l'objectif est défini comme suit : le psychologue et le chercheur en IA ont en commun leur identité de vue en ce qui concerne la meilleure manière d'aborder le problème de la construction d'une machine intelligente et "d'imiter le mécanisme conceptuel humain qui traite du langage". Un préalable consiste à définir ce langage d'une manière opérationnelle différente de celle des linguistes et inspirée ; des neurosciences. Cette formalisation consiste en une définition de topoï en rapport avec des phrases et des histoires réductibles à des scènes ou scénarios programmables (Infra VII.2). Il ne s'agit là que d'une esquisse de la "machine-qui-sait-tout [qui] existera un jour" (op. cit. 247) Cette approche de la complexité sémantique de la langue, de sa représentation et de sa modélisation mérite de retenir l'attention notamment en ce qui concerne les formalisations programmées de certains comportements humains (Genèses de l'intelligence artificielle, Quaderni, n° 1, Paris, Univ. Dauphine, 1987)

L'IA "faible" marque une pose théorique en se concentrant sur les progrès techniques et méthodologiques sans insister sur les métaphores symboliques abusives ou prématurées. L'accent est ainsi mis sur l'interdisciplinarité des recherches permettant l'élaboration d'instruments de calcul supérieurs aux capacités humaines en ce qui concerne la mémoire, la vitesse de calcul, les graphismes. En revanche les machines ne peuvent ni apprendre, ni agir avec intention, ni réaliser certains rapprochements dans un contexte vivant et signifiant. C'est notamment le cas des démonstrations relevant de conjectures et d'hypothèses aléatoires que permet de concevoir la capacité combinatoire des circuits neuronaux humains. C'est ce que permettrait d'illustrer la démonstration prestigieuse, parce que séculaire et fondée, du "dernier théorème de Fermat" ($x^n + y^n \neq z^n$ pour $n > 2$) par une relation entre la théorie des nombres et les courbes elliptiques réalisée par A. Wiles en 1993, faisant suite à de nombreux travaux de mathématiciens (Y. Hellegouarch, Fermat enfin démontré, Pour la Science, 220, Fév. 1996 : 92 sq ; C. Goldstein, , La Recherche, HS, 2, 1999 : 21 sq).

L'impact des ordinateurs sur les mathématiques est désormais jugé de manière réaliste et pratique. J. Horgan (L'ordinateur en mathématiques, Pour la science, 194, Déc. 1993 • 84 sq) met l'accent sur la tendance des processus cognitifs à valoriser dorénavant l'idée d'une limite constituée par l'incertitude de connaissances

provisaires. Cela met en cause "la nature de la démonstration et donc de la vérité mathématique". La démonstration nécessitant de longs calculs coûteux qu'aucun mathématicien ne peut vérifier, ajoute l'idée d'une complexité invérifiable à celles déjà formulées d'incomplétude et d'indécidabilité. L'avènement de ces "mathématiques expérimentales" ne remet cependant pas en cause les mathématiques "pures" de la tradition : ce qui est mis en question, c'est encore une fois, la relation complémentaire et dialectique entre le cerveau et l'ordinateur dans leurs capacités respectives : biologique et symbolique pour l'un, mécanique et récursive pour l'autre. En bref, deux supports et deux formes des langages de la formalisation.

A cet égard et d'après A. Grumbach (La conscience artificielle, HS, Sciences et Avenir, "La pensée", Avr. 1998 : 34 sq) qui présente l'ordinateur "comme métaphore de l'esprit", il s'agit de transformer l'approche sémiotique du symbole signe-objet-interprétant, en un concept présentant quatre propriétés : référence physique-extension-symbole intension. L'opération fondamentale étant d'exprimer l'extension en intension grâce à une manipulation de structures telles que le langage, le sens, les percepts, la communication. Les conditions d'une telle opération ne sont pas encore réunies même si certaines expériences ont pu réussir après de longs apprentissages.

* * *

Les ordinateurs "moléculaires" introduisent de nouvelles considérations dans cet impact des technologies sur la manière de traiter les langages; mathématiques et leurs métaphores. Deux recherches impliquant une collaboration entre physiciens, chimistes, ingénieurs et biologistes, doivent être mentionnées dans cette optique : celles portant sur le calcul quantique et sur le calcul ADN (Dossier "Savoirs", La Recherche, 347, Nov. 2001 : 25-60).

La première (Y. Maguire, op. cit. 27-32) se donne pour mission de traduire des lois physiques lorsqu'on entre dans le domaine de la mécanique quantique avec pour objectif "la construction d'un ordinateur quantique" plus performant et moins volumineux que ceux à microprocesseurs. "Les molécules existent dans notre espace physique, mais les informations qu'elles peuvent porter sont, elles, dans un espace étrange et fort utile, l'espace de Hilbert, dont la taille croît exponentiellement avec leur nombre d'atome". En bref, il s'agit d'utiliser la résonance magnétique nucléaire (IRM dans l'imagerie médicale) pour accéder aux propriétés quantiques des atomes et matérialiser à ce niveau des informations en utilisant les spins des noyaux d'hydrogène, sous forme de bits quantiques (q-bits notés 00,11,01,10) supposés intervertissables dans le calcul.

Une "petite porte logique" peut être ainsi ouverte par un couplage spinspin : "Si A vaut 1 alors B vaut 0" ou l'inverse. Cette méthode se heurte cependant à des obstacles restant à surmonter : la fragilité et la vulnérabilité des propriétés quantiques sources de "décohérence" paralysante et actuellement incontrôlées à un seuil rentable malgré les progrès réalisés grâce à la chimie et au contrôle du champ électrique. Reste à souligner d'un point de vue sémiologique, la réduction scientifique-dialectique des contrastes entre deux univers de lois physiques à une adéquation "logique" entre spin et information codée (Infra VI.3.1.)

La seconde recherche (B. Yurke, op.cit. 37-41) s'appuie sur la biologie moléculaire et les propriétés informatives de l'ADN (acide désoxyribonucléique) dans les gènes des êtres vivants. La réplique de ces produits, de- l'évolution naturelle durant des milliards d'année, dans un procédé chimique de calcul est imparfaite et demeure à l'état d'hypothèse en raison notamment de sa lenteur. En revanche, le calcul ADN peut conférer une fonction complémentaire aux ordinateurs avec microprocesseurs au silicium, en permettant leur assemblage à l'échelle moléculaire. Il s'agit pour cela d'utiliser la propriété permettant aux hélices de l'ADN de s'associer pour constituer des "tuiles" avec des attaches correspondantes permettant de former des "pavages" pour le calcul. "La relation entre le calcul et l'assemblage est en effet étroite. Dans chaque cas, on suit une procédure, un algorithme... La mise au point d'une méthode de calcul ADN est surtout la transformation d'un problème de mathématique en un problème d'assemblage d'ADN. La spécificité de l'hybridation de l'ADN rend possible qu'un tel assemblage se déroule automatiquement dans le mélange". "Dans tous les cas, l'auto assemblage algorithmique ne remplacera pas du jour au lendemain la technologie de lithographie utilisée aujourd'hui pour la gravure des microprocesseurs au silicium..."

D'une manière générale, l'évolution mathématique en rapport avec les autres secteurs de la recherche, crée des situations d'incertitude qui échappent à la conception rigoriste traditionnelle. M. Combes (Fondements des mathématiques, Paris, P.U.F. (QSJ), 1971 : ch. 6) présente ces situations comme d'inévitables compromis entre la discussion et la tolérance, autrement dit, entre pragmatique et éthique. Discussions sur les fondements qui sont une manière d'introduire une sorte de processus cognitif, grammatical dans sa normativité, constructif dans son élaboration, intuitif dans ses bases psychologiques. Tolérance des nouvelles approches globalisantes en tenant compte de la localisation des fondements. "Le défaut de chacune des solutions envisagées ne serait-il pas qu'elle se limite à un domaine et le privilège pour y établir ses constructions ?... Pourquoi chercher l'unification de ces modes de construction en privilégiant l'un d'entre eux au détriment des autres ? Les traductions qui permettent de passer de l'un à l'autre attestent plutôt leur parenté".

Dans L'analyse mathématique P.U.F.- QSJ; 1969 : 118), A. Delachet signale à quel point, aujourd'hui plus que par le passé, les mathématiques progressent parallèlement aux science appliquées. "La physique réclame constamment un outil: plus perfectionné. C'est ainsi que les espaces de Hilbert à métriques non définies sont introduits en 1941 par le physicien Dirac et étudiés deux ans après par le mathématicien Pontriagine. Faisant nôtre l'opinion autorisée de Dirac, nous pouvons dire que tout nouveau concept mathématique a son interprétation dans la nature".

Manifestant un même souci d'ouverture, H. Putnam (Représentation et réalité, (1988) trad., Paris, Gallimard, 1990 : 179 sq) propose l'établissement d'une liaison entre "l'objectivité et la relativité conceptuelle". "L'important est de trouver une conception qui nous permette de donner un sens aux phénomènes en restant à l'intérieur de notre monde, au lieu de chercher à se prendre pour l'oeil de Dieu". Les phénomènes auxquels il convient de donner su sens sont notamment "la division du travail linguistique, la contribution de l'environnement, le holisme de la signification, par exemple". Utilisant analogiquement le langage de la mécanique quantique, l'auteur considère comme "objets" les n particules élémentaires

désignées par leur appartenance supposée à un contenant ou à une variable également "objets" abstraits, sans négliger les sous-groupes également "objectables".

Ces derniers textes situent les mathématiques à l'opposé de la théorie positiviste; de "science des sciences" elles redeviennent ce langage à formaliser de manière adéquate en rapport avec l'évolution et les transformations pragmatiques de ses références.

A noter l'ouverture de l'idée de calcul qu'implique l'approche ADN combinant nature, biologie et physique à quoi s'ajoute la relation sous-jacente entre calcul, assemblage et algorithme, laquelle n'est pas sans rapport analogique, métaphorique, symbolique avec les règles du langage ordonnant par jonction différents regroupements significatifs dont la formalisation.

Dans le cadre pragmatique, la logologie constitue une autre approche de la pensée mathématique que nous avons déjà esquissée et positionnée entre la capacité symbolique du sujet et sa gestion inter faciale du langage tournée également vers la référence aux environnements matériel et culturel. De ce fait, elle se situe par rapport aux thèmes que nous venons d'exposer où domine l'idée d'une mathématique expérimentale et évolutive permettant d'explorer des aspects nouveaux de la complexité épistémique et heuristique de la formalisation : numération et abstraction, chaos, fractales, quanta, graphismes, connexions et disjonctions. Autant de formulations dont les composants linguistiques ne sont pas absents ; bien au contraire : elles constituent des incitations à préciser non seulement l'influence des langages sur la mathématique, mais aussi, à l'inverse, les impacts de celle-ci sur les formes langagières les plus courantes exposées et développées dans les chapitres suivants.

Ch. III. Linguistique idéo-figurative; la formalisation rhétorique

Depuis l'Antiquité, la rhétorique a accompagné la logique dans la description du substrat langagier de la formalisation. La présente approche a pour but de préciser le niveau pré rationnel de la recherche et de l'invention, ce que désignent parfois des termes comme "intuition" ou "inspiration" ou encore "prélogique" ou "prénotion mathématique" autant de désignations de ce qui est implicite et admis d'emblée dans les raisonnements, évoquant les sens latents et figurés qui dynamisent les communications de la pensée par enrichissement des sens des mots et expressions suscitant adaptation et évolution, compréhension, entente et conventions.

III 1. Conceptions de l'idéation par les figures

De Pascal. (Oeuvres complètes, Seuil, 1963 : 348-369) on retiendra la définition qu'il donne de l'art de persuader partagé entre la démonstration rigoureuse et la rhétorique trompeuse, insistant toutefois sur la nécessité de sauvegarder la liberté de langage qui garantit une ouverture sur l'inconnu. C'est à cette dernière préoccupation que répond par exemple la Règle III "pour la direction de l'esprit" de Descartes (Oeuvres complètes, NRF, 1953 : 42-45) : "Sur les objets proposés à notre étude, il faut chercher non ce que d'autres ont pensé ou ce que nous-mêmes nous conjecturons, mais ce dont nous pouvons avoir l'intuition claire et évidente ou ce que nous pouvons déduire avec certitude : car ce n'est plus autrement que la science s'acquiert". La liberté de choix laissée par l'intuition permet par exemple des comparaisons de figures et d'idées aboutissant à des liaisons entre mots, concepts et figures, base des signes et relations constitutives de la géométrie algébrique.

Les rhétoriciens classiques étaient conscients de cette propriété épistémique lorsqu'ils réintroduisaient la rhétorique dans la pratique courante du langage usuel, instrument de la pensée. Du Marsais (Traité des tropes (1730), Paris, Le nouveau commerce, 1977 : 8 sq, 233) énonce d'emblée : "Bien loin que les figures s'éloignent du langage ordinaire des hommes, ce serait au contraire les façons de parler sans figures qui s'en éloigneraient, s'il était possible de faire un discours où il n'y eût pas d'expressions non figurées..." Ce sont des manières de parler qui "expriment non seulement des pensées, mais encore des pensées énoncées d'une manière particulière qui leur donne un caractère propre ; celles-là, dis-je, sont appelées "figures", parce qu'elles paraissent, pour ainsi dire, sous une forme particulière", qui les distingue de la simple "phrase" ou "expression" limitée aux formes syntaxiques et sémantiques. Cette interprétation est illustrée à propos des nombres par l'opération suivante qui leur donne un sens : "En termes d'arithmétique, quand on dit trois louis, dix hommes, en un mot, quand on applique le nombre à quelque sujet particulier, ce nombre est appelé concret, au lieu que si on dit "deux et deux font quatre" ce sont là des nombres abstraits qui ne sont unis à aucun sujet particulier. On considère alors par abstraction le nombre en lui-même, ou plutôt l'idée de nombre que nous avons acquise par l'usage de la vie".

Le sous-titre du Manuel de P. Fontanier est "Éléments de la science du sens des mots" (in Les figures du discours (1821) Paris, Flammarion, 1968 : 39, 279 sq). Notion préliminaire : "Les Tropes sont certains sens plus ou moins différents du sens primitif, qu'offrent, dans l'expression de la pensée, les mots appliqués à de nouvelles idées". Ils renvoient à "des notions premières, et sur l'expression de la pensée, et sur la pensée elle-même". L'ouvrage comporte une partie rhétorique classique renvoyant à la distinction entre sens littéral et sens figuré ou détourné des mots ; une seconde partie est consacrée aux non-tropes ; elle constitue une généralisation des formes figuratives du discours. "Ce sont les formes, les traits ou les tours plus ou moins remarquables et d'un effet plus ou moins heureux, par lesquels le Discours, dans l'expression des idées, des pensées ou des sentiments, s'éloigne plus ou moins de ce qui en eût été l'expression simple et commune." Ces figures non-tropes concernent la diction, la construction, l'élocution, la signification, le style, la pensée.

Des figures de construction, retenons la synthèse qu'exprime une forme de pensée en synecdoque du rapport langagier entre tout et parties. "L'Académie dit : le Sénat fut partagé: "la plupart voulaient que... la

plupart furent d'avis que...". Or, pourquoi le verbe est au pluriel tandis que "la plupart "est au singulier ?". Le paradoxe grammatical se résout par une synthèse entre "la plupart" et le sens sous-entendu pluriel "des sénateurs", autrement dit, entre l'unité et la multiplicité totalisée qu'elle représente. Relèvent de situations analogues les "figures d'élocution par liaison" qui ne sont pas sans évoquer la théorie des ensembles.

Les figures de style par rapprochement éclairent certaines suggestions intuitives. La "Comparaison" vise à susciter l'idée de rapports de "convenance ou de disconvenance, de ressemblance ou de différence". "L'Antithèse" procède par opposition. "L'Enthymémisme" "consiste en un rapprochement vif et rapide de deux propositions ou de deux termes, d'où résulte dans l'esprit une conséquence vive et frappante qui le saisit et l'entraîne d'une manière victorieuse" ; à rapprocher du Paradoxe.

Les figures de pensée sont les plus abstraites et les plus indépendantes par rapport au langage, elles ont lieu par imagination, par raisonnement ou par développement. De l'Imagination retenons la "fabulation" en tant qu'invention fictive présentée comme réelle, la "rétroaction" qui consiste en une remise en cause de ce que l'on a dit parce que jugé incroyable ou déplacé. Le Raisonnement ou la Combinaison comporte la "Délibération consistant à feindre un doute pour faire valoir des arguments, La Communication sert à persuader des opposants à l'inverse de la Concession. Le Développement consiste à "exposer un objet aux yeux et à le faire connaître par le détail des circonstances les plus intéressantes" pouvant inspirer une image, un tableau, une "graphie" ; en font partie la Topographie spatiale, la Chronographie temporelle, le Portrait, le Parallèle.

Les "prétendues figures de pensée" se réfèrent à un pouvoir surnaturel: la Commination, l'Imprécation, l'Optation, la Déprécation, le Serment. A noter la Dubitation définie comme "cette irrésolution, cette incertitude pénible et cruelle d'une âme qui, poussée en sens divers ou contraires par la violence de la passion , ne sait ni ce qu'elle veut ni ce qu'elle ne veut pas, ne fait que se contredire..."

Comment interpréter les tropes, les non-tropes, les figures ? Ces formes d'expression ont une même origine qui est aussi ancienne que le "langage de la parole". Les facultés intellectuelles ou morales originaires sont l'imagination, l'esprit, la passion auxquelles il faut ajouter la sensibilité et la raison ; le but de cette dernière étant de "persuader et convaincre" par ses propres moyens, mais aussi en empruntant à l'esprit "ses ruses, ses artifices, son charme puissant". D'où la complémentarité des facultés qui interviennent dans la formation des "figures de pensée par raisonnement". La grammaire et la logique n'en sont pas absentes même si elles sont sous entendues par certains concepts : intuition, abstraction, affirmation, négation, doute, croyance, comparaison, répétition, assemblage,, influence, régleur, graphisme... Précisons qu'il s'agit bien là de fermes d'intellection traitées "techniquement" comme autant de facteurs dans l'élaboration du sens à la base des processus constitutifs et adaptatifs des langages dans le temps ou catachrèse (Du Marsais, op.cit. : 44 sq).

* * *

Relativisant la logique des certitudes à la base d'une interprétation rationaliste de la connaissance, la linguistique idéo figurative opère comme un substrat langagier et une étape incontournable de l'utilisation et de l'interprétation des signes à la base de la formalisation impliquant également la pragmatique, la sémiologie et la régulation qui la conditionnent. Une précision s'impose : il s'agit bien d'une recherche portant sur les langages de la mathématique dans une perspective logologique, et non pas, à l'inverse, d'une étude sur les utilisations rhétoriques de ces langages. Cette différence de perspective est illustrée par l'article de J. Durand sur la "rhétorique du nombre" (in Recherches rhétoriques, Communication 16, Paris, Seuil, 1994 : 183). Les premiers paragraphes sont consacrés à la fonction rhétorique de la quantification dans le langage courant. Ainsi, l'anaphore répétition s'applique aux nombres en tant que positionnement récursif frappant, pouvant évoquer un fait réel (555 F x 5 à payer) ou fortuit et donc étonnant (X est né le 12.12.1912 à 12 h.) Une énumération a le caractère d'un assemblage entre parties dans un tout lorsqu'une succession de nombres divers illustrent "les différents aspects d'un même événement ou objet" (1 région de 5000 km², de 130000 habitants, de 150 communes). L'antithèse la plus fréquente oppose de manière choquante un "petit" nombre à un "grand" (1 milliard de francs d'amende pour un vol de 10 francs) ; cette figure peut prendre la forme d'un paradoxe (X tombe du 5ème étage et est indemne). La métaphore est présentée comme la substitution d'un nombre à un mot ou l'inverse (Allez-y 1 fois et vous verrez : c'est un 0) ; également comme la substitution d'écritures : chiffres romains, arabes, lettres latines, grecques...

Dans sa conclusion, l'auteur va au-delà de ce constat : "Allant plus loin, on peut se demander si la rhétorique ne peut pas trouver une application plus générale en mathématique". Deux raisons à cela. La première réside dans les inadéquations de la formalisation toujours remise en cause au cours de son développement historique, ce qui renvoie à une interprétation des étapes de la pensée. La seconde "réside dans le caractère non explicite de certains codes utilisés par les mathématiciens" ; par exemple, "Si la notation x_i a un sens, la notation i_x n'en a guère", cela exigerait une explicitation du rapport conventionnel entre variables, indices et signes, lequel relève de la répétition et/ou de la connotation. D'où la question : la rhétorique est-elle cet "instrument universel permettant d'imposer un sens à un ensemble d'éléments" connectés par une composition propositionnelle ? La réponse n'est pas simple.

De l'ambiguïté au questionnement et à la problématique : c'est ce que propose M. Meyer (Histoire de la rhétorique des Grecs à nos jours, Paris, LGF, 1999 : 28, 329sq) rappelant que la rhétorique depuis Aristote réside dans la liaison éthos –pathos– logos / orateur-auditoire-langage, ce qui la fonde sur la pragmatique et l'aptitude à persuader. Or les trois composants de cette triade peuvent être séparés ce qui permet de considérer le logos autrement que comme la norme d'un raisonnement pauvre. "Une rhétorique enracinée dans le logos, c'est la façon de traiter la problématique" à partir de quatre moments l'invention, la disposition, l'élocution, la mémorisation. Le logos traduit alors l'interrogation et devient l'instrument d'une problématologie traitant de la différence question-réponse. "La forme est ce qui sert à l'exprimer pour suppléer au contexte qui est parfois insuffisant pour différencier ce qui est question et ce qui ne l'est pas", l'expression est alors une proposition ou un jugement dont la base est une interprétation. Retenons la définition suivante : "la rationalité interrogative devient incontournable comme problème".

La question peut également être envisagée en tant que catégorisation sémantique fondée sur des conditions jugées opportunes ou suffisantes. Les prototypistes proposent un modèle fondé sur la ressemblance soit avec un prototype central (moineau pour oiseaux), soit avec un exemplaire quelconque d'une catégorie (ressemblance de famille). Quoi qu'il en soit le problème, à ce niveau, est un problème de croyance posé dans des situations changeantes (V. Nyckees, Les mots, les choses... et nous, Sciences humaines, 27, HS, Déc. 1999 : 211). C'est à ce niveau que se manifestent les formes originelles de la création de sens que l'on peut analyser d'après des caractéristiques psycho langagières exprimant une relation entre pensée, intuition, percept et communication.'

La formalisation est révélatrice de telles propriétés linguistiques souvent implicites dans les propositions logiques et mathématiques, c'est ce qui permettent d'établir les formes idéo figuratives de l'intellection, une illustration est fournie par les Ecrits logiques et philosophiques de G. Frege (trad. C. Imbert, Paris, Seuil, 1971) lorsqu'il s'interroge sur les relations entre sa logique idéographique (Begriffeschrift) et la langue commune. Nous confronterons ses idées aux conceptions des idéo figures dans les développements qui suivent.

III 2. Idéo figures topiques et constructions, formelles

Dès l'antiquité est conçue une rhétorique topique des lieux et des temps définis comme "certains chefs généraux dont on peut tirer de quoi s'étendre dans un discours!". Ainsi, "les topiques de Cicéron contiennent la méthode de trouver les arguments par le moyen de certains termes qui les caractérisent, et qu'on appelle lieux de rhétorique ou lieux de logique" (Litttré). Pour Aristote (Rhétorique II, 1396a, Paris, Les Belles Lettres, 1967 : 113) les Topiques sont un procédé pour aborder l'incertitude en utilisant des lieux communs pour préciser le sujet d'un discours, il faut donc "avoir pour chaque sujet un choix tout fait de propositions sur les choses possibles et les choses les plus opportunes ; et, sur les questions qui se posent à l'improviste, [...] celles qui ressortissent au sujet même du discours, et en englober le plus grand nombre possible dans le voisinage le plus immédiat de la question..."

Actuellement, ces procédés ont revêtu une importance épistémique incontestable. Déjà, Du Marsais (1977 : chap. I) considérait la rhétorique des tropes comme "du ressort de la grammaire" et il introduisait la notion de temps dans leur définition. La catachrèse (du Grec : usage abusif) est présentée comme une adaptation topique du langage usuel par extension des sens de certains mots afin de leur donner une nouvelle signification ayant quelque rapport avec la précédente. Le problème sémantique et pragmatique ainsi posé par une complexification lexicale se trouve "objectivé" en tant que construction et aménagement de la signification des mots dans un espace-temps évolutif concrétisé grammaticalement par des prépositions telles que "hors", "dans", "avant", "après", "près", "loin,..." Les raisons pratiques de ces changements de sens sont évidentes: rapidité et économie qui en font des formes originelles des langages parfois interprétées comme "figurées" mais en fait tout aussi réalistes que les autres.

Dans cette perspective se situe l'oeuvre de K. Burke consacrée à la Grammaire et à la Rhétorique des Motifs (in C. Roig, Symboles et société, Berne, Lang, 1977) . "Les motifs sont des subdivisions dans une structure [frame] plus large de significations [meanings]". Ils opèrent des sélections de relations significatives qui sont des "interprétations de la réalité avec, pour effet, que différents systèmes d'interprétation doivent conduire à des conclusions différentes sur ce qu'est la réalité", et cela dans "un contexte de situation" qui les influence. Cette conception de la rhétorique se veut "réaliste" et orientée vers la connaissance du langage. Par exemple, ce qui doit retenir l'attention à propos des tropes et des figures, c'est leur perception abstraite qui est la condition de leur fonction langagière réelle dans la découverte et la description d'une "vérité" en tant que lieu de perspectives, de réductions, de représentations et de dialectique. L'auteur construit un scénario pour une action dans un espace-temps à partir de termes de base transformés en principes générateurs de sa méthode en tant que "formes nécessaires du parler sur l'expérience, car notre intérêt est avant tout l'analyse du langage plutôt que l'analyse de la réalité". Le logos exprime alors un esprit confronté à lui-même entant que sujet et objet de la recherche dans une conception réductrice de l'espace-temps (chronologie, vécu, mémoire, abstraction, but), et qui est donc obligé d'élaborer une représentation crédible (simulation, système, modèle, jeu) empiriquement fondée sur des données, des informations et des repères organisés à partir de lieux topiques conceptuels et relationnels (Sujet, verbe, complément ; Antécédent, succession, conséquence ; quantité et qualité ; Liaison, contradiction, conciliation...) (Infra VII, 1.)

Une précision : cette topique des lieux tient compte de la topique des formes ou topoï portant sur la valeur sémantique des énoncés compte tenu de la "coexistence dans la signification de valeurs informatives et argumentatives" qui interviennent dans les assertions. Les topoï sont ainsi les manifestations lexicales ou relationnelles d'interprétants permettant de passer d'un énoncé à un autre, différent ou contradictoire. "La signification d'une phrase est l'ensemble des topoï dont elle autorise l'application dès lors qu'elle est énoncée". Certains topoï sont gradables (évoquant la logique floue) par exemple : "intelligent, grand, rapide, travailleur" gradués par "peu, très, trop, mais, comme, ne...que" ; également la relation entre argument et conclusion et la "nature vériconditionnelle" du discours scientifique en rapport avec des métalangages normatifs et/ou conventionnels (tiers exclu, non-contradiction, intuition, circularité tarskienne) (J.C. Anscombe (Ed.) Théorie des Topoï, Paris, Kimé, 1995: 32, 38 sq, 52 sq).

* * *

La démarche intellectuelle de Frege concernant la topique d'une logique idéographique peut être résumée comme suit, Dans l'écrit "La science justifie le recours à une idéographie (op. Ci t. :63 sq) il constate que le "langage se révèle déficient lors qu'il s'agit de prévenir les fautes de pensée. Il ne satisfait pas à la condition ici primordiale, celle d'Univocité, compromise par les significations variables des mots". Cependant, "si le langage ne donne pas, sinon allusivement, les rapports logiques, il les laisse deviner sans les exprimer proprement". A l'inverse, les règles logiques offrent "une faible protection [dans] les domaines où les moyens de vérification commencent à se dérober y compris dans les mathématiques supérieures". Ainsi, le langage ne peut être ignoré.

La logique est fondée sur "une écriture qui veut exploiter tous les avantages propres aux signes visibles [et qui] doit être entièrement différente de tous les langages parlés". Le traitement sémiologique des informations est ce qui fonde la topique idéographique : distinction entre forme et contenu, entre signe et désigné qui permet de traiter le terme "Dénotation" en ignorant la connotation. De même, les termes "Fonction" et "Argument", pris ensemble, constituent un tout complet". L'argument est un nombre, "un tout fermé sur soi" ; "l'identification de la fonction dépend de l'analyse de la construction de l'expression où elle figure". Cette interprétation permet de réduire le sens à une relation algébrique : si on traite l'argument comme une valeur numérique de l'abscisse d'un point et la valeur correspondante de la fonction comme la valeur numérique de son ordonnée, on obtient un ensemble de points qui se présente à l'intuition dans les cas habituels, sous l'apparence d'une courbe". Dans "Sens et dénotation" (op. cit. 102 sq), l'auteur précise : "la dénotation d'un nom propre est l'objet même que nous désignons par ce nom ; la représentation que nous y joignons est entièrement subjective ; entre les deux gît le sens qui n'est pas subjectif comme l'est la représentation, mais qui n'est pas non plus l'objet lui-même". Ainsi la topique idéographique se définit au niveau métaphorique du langage par trois perspectives possibles : personnelle, artistique, dénotative. La dénotation s'identifie alors à la valeur de vérité d'une proposition sur le mode $y = f(x)$.

Cependant, la rigueur dénotative conduit à des "imperfections du langage dont le symbolisme de l'analyse mathématique n'est pas entièrement libéré". Certaines combinaisons de signes censées dénoter quelque chose sont restées sans dénotation, du moins à une certaine époque. C'est le cas suivant l'auteur des séries infinies divergentes mais elles peuvent être actuellement rapprochées par synecdoque des séries semi-convergentes dans l'espace de Banach.

Le retour au langage s'effectue aussi par une topique concrète : "les lieux, les dates , les périodes sont, dans une perspective logique des objets ; il convient donc de considérer comme un nom propre la désignation par des signes linguistiques d'un lieu déterminé, d'un instant ou d'une période déterminée ". Le processus de réduction à un signe élimine alors les concepts de l'espace-temps comme conditionnement de faits et de phénomènes analysés mais déterminés par un contexte présupposé n'ayant pas valeur de vérité.

Dans "Concept et objet" (op. cit. 127 sq) l'adaptation temporelle (catachrésique) du langage est évoquée à propos d'un élément simple découvert préalablement à toute analyse et pour lequel "il faudra bien forger un nom... Toutefois, il n'est pas impossible d'avoir recours à une définition pour introduire le nom de ce qui est relativement simple. Il ne reste qu'à inviter par quelque signe le lecteur ou l'auditeur à mettre sous le mot ce que l'on veut lui faire entendre". En bref, le logos formel n'est pas libéré de la triade logos-ethos-pathos et des interprétations qu'elle présuppose en rapport avec la valeur de vérité.

Autre forme topique (Compte rendu de philosophie der Arithmetik I, op.cit. 143 sq) : le rapport entre intension et extension dans l'énoncé d'un nombre apportant une information sur un concept : l'extension et le concept vont alors de pair. Est ainsi posé le problème de l'emploi de mots comme "Totalité" et "Ensemble" qui renvoient à une synecdoque numérique comportant trois écueils : le rapport entre identité et discernabilité des unités, les nombres 0 et 1, les grands nombres. Autant de "ravages dus à l'intrusion de la psychologie dans la

logique", et pourtant, la solution ne peut éviter de faire référence au langage lorsqu'il est fait appel, non sans motifs prélogiques, aux principes et axiomes pour traiter de l'intension conceptuelle reposant sur l'évidence, la commodité ou l'interprétation.

Plus généralement, la complémentarité entre topique et logique est une forme du rapport entre diachronie et synchronie. La topique met en valeur la diachronie du sens en tant que théorie des concepts et termes de base permettant de catégoriser et de relier les pensées, les arguments et les propositions de manière cohésive. En logique, c'est la synchronie des signes et des formules qui constitue le moyen et la fin de la formalisation réductrice de sens dans certaines limites. Telle est la base logo logique des liaisons exposées ci-après entre les idéo figures et les idéographes.

III. 3. Liaisons par connexions et inférences

Les figures par connexion, la métaphore et la métonymie, peuvent être interprétées comme des inférences idéelles (sémasiologiques). A côté des effets argumentatif, esthétiques ou oratoires qu'on leur attribue communément, Du Marsais (1977:29) attire justement l'attention sur un de leurs usages les plus fréquents qui "est de réveiller une idée principale, par le moyen de quelque idée accessoire..." L'inférence met ainsi en rapport l'idée formulée et l'idée accessoire par rapprochement et substitution pour évoquer (en cas de réussite) une idée principielle. Les tropes évoquent donc le mouvement créé par la perception de la stabilité du référent (signe) en rapport avec un changement significatif du référé (objet) par voie d'abstraction. Ainsi, une "opération" peut se révéler chirurgicale, arithmétique ou militaire ; une construction peut être matérielle ou théorique. Le problème posé concerne alors la cause et la compréhension du passage d'une signification à une autre et de ses implications : passage du langage contextuel au langage hors contexte, du langage usuel à la logique, de l'intension à l'extension, etc...

La métaphore (ou transposition de sens) opère à partir d'une double référence permettant de définir deux perspectives ou deux sens concernant une même idée ou un même concept. La philosophie positive offre un exemple remarquable de cette opération lors qu'elle affirme que "la mathématique est la plus exacte de toutes les sciences", métaphore dans laquelle le mot "exacte" permet de connecter la mathématique et les sciences, tout en lui réservant une place à part, la première, dans la classification par gradation en degrés d'exactitude. L'inférence idéelle, apparemment réussie, est d'exclure implicitement cette discipline des matières linguistiques et logiques constituées en "instruments".

L'approche littérale des sciences humaines par R.H. B̄rown (A Poetic for Sociology, Cambridge Univ. Press, 1977 : Chap. 4, 5) pose le problème en termes épistémiques à partir de la métaphore présentée topiquement sous trois angles. Un transfert de sens par lequel "un terme situé à un niveau ou dans un système de référence, est utilisé à un autre niveau ou dans un autre système, Une base pour la modélisation, les modèles étant des "métaphores dont les implications ont été expliquées". Une analogie (changement de sens par changement de contexte) ou une icône (création d'objets de recherche par croisement de systèmes

apparemment différents). La métaphore "racine" est quant à elle basée sur des "images fondamentales du monde pour en tirer des modèles et des illustrations" (la société présentée comme organisme ou machine, la conduite sociale comme langage, drame ou jeu). Littéralement, la métaphore doit paraître absurde ; consciemment, elle doit signifier "comme si". La science est par exemple "l'enfant d'un mariage entre l'empirisme de Bacon et le formalisme mathématique de Descartes", d'où une conception duale exigeant des solutions allant d'un monisme réducteur à une contradiction rationalisée par une vision abstraite "vers le haut" ou par une perception concrète "vers le bas". Il en résulte une "interdépendance fonctionnelle et une solution dialectique d'oppositions" à un niveau "plus élevé". Par exemple : les conséquences inattendues d'une action sociale finalisée (Merton), la distinction des fonctions latentes et manifestes, les rapports entre le déterminisme et la liberté, etc...

La métonymie (ou changement de nom) crée une inférence idéelle à partir d'une relation ou d'une correspondance suggérée par un mot employé à la place d'un autre, par exemple, la cause pour l'effet, le contenant pour le contenu, un signe pour un objet, ou inversement. Ainsi, "logique" peut être employé pour "tiers exclu", la "vérité formelle" pour la "vérité propositionnelle", "mythe" pour "transfini", "chaos" pour "inexplicable".

Les inférences idéelles sont une des bases de la sémiologie numérique dont on sait qu'elle exprime des définitions en extension à différents niveaux d'abstraction dans un langage hors contexte mais non pas indépendant de toute référence réelle ou symbolique (Onomasiologie). Sont principalement concernés la théorie des nombres et l'algèbre, mais aussi les graphiques. Dans une première étape des signes sont définis conventionnellement de manière empirique afin de permettre une quantification abstraite et économique d'objets réels. Une seconde étape concerne les calculs et les comptes exigeant le traitement de nombres ordonnés, opérations concrétisées par l'emploi des bouliers. Partant de la succession des nombres et de leur décimalisation, la troisième étape concerne le développement et la complexification de la théorie des nombres réels, concrètement finis et idéellement infinis. L'algèbre est une abstraction dérivée à un niveau supérieur totalement indépendant de toute référence contextuelle externe, fondée sur des signes fonctionnels et relationnels appliqués à des valeurs constantes ou variables dans des équations et des fonctions éventuellement dans des graphiques issus d'une géométrie algébrisée (Infra III.1.3).

Traitant des "buts de l'idéographie" (op. cit. 70 sq), Frege procède par connexion et inférence en s'exprimant comme suit : "Je veux fonder les quelques signes que j'ai introduits avec les signes mathématiques en un seul formulaire. Les signes existants correspondraient à peu près aux racines des mots, tandis que les signes introduits sont à comparer aux terminaisons et aux particules qui établissent des rapports logiques entre le contenu des racines". En d'autres termes, il s'agit de traduire un rapport numérique en un graphe ou schème, cela par changement de signes et transfert de sens dans un langage vériconditionnel élaboré par inférence en tant que perspective sur la mathématique.

Par exemple :

- Un trait horizontal devant une opération symbolise l'unité d'une connexion factuelle :

$$\text{—— } 2 + 3 = 5$$

$$\text{—— } 4 + 2 = 7$$

- Les traits de jugement sont placés perpendiculairement au trait horizontal pour affirmer la validité inférée de l'opération :

$$\text{└—— } 2 + 3 = 5 \text{ (Vrai)}$$

$$\text{——┐ } 4 + 2 = 7 \text{ (Faux)}$$

- Les traits de mise en rapport et en, relation de deux jugements signalent l'équivalence ou la causalité :

$$\begin{array}{l} \text{—— } A \\ \text{└—— } B \end{array}$$

- Les traits de suppression d'une indétermination algébrique par connexion opérationnelle du nombre 2 signalent la certitude :

$$\begin{array}{l} \text{└—— } x^2 = 4 \text{ ("Si } x + 2 = 4, \text{ alors } x^2 = 4\text{") } \\ \text{└—— } x + 2 = 4 \end{array}$$

"Car le jugement hypothétique est la forme commune à toutes les lois de la nature, la forme de tous les rapports de causalité. A vrai dire, la langue commune ne permet pas qu'on traduise ce signe dans tous les cas par "si". Elle l'admet dans le seul cas où une partie du contenu, ici x , est indéterminée et donne à l'ensemble un caractère général "

III. 4. Liaisons entre parties et totalité

Fontanier (op. cit. 87 sq) définit la synecdoque (ou compréhension simultanée) comme "la désignation d'un objet par le nom d'un autre objet avec lequel il forme un ensemble, un tout, ou physique ou métaphysique, l'existence ou l'idée de l'un se trouvant comprise dans l'existence ou l'idée de l'autre". La "synecdoque de la partie" consiste à prendre une partie du tout pour le tout lui-même" ; par exemple : "le coeur, l'âme, l'esprit, le corps de l'homme pour tout l'homme". La "synecdoque du nombre consiste à prendre le singulier pour le pluriel" ou inversement ; par exemple : "l'homme pour les hommes, le Français pour les Français, le riche pour les riches". La "synecdoque d'abstraction consiste à prendre l'abstrait pour le concret, ou, si l'on veut, à prendre une qualité considérée abstractivement et comme hors du sujet, pour le sujet ayant cette qualité. On peut la distinguer en synecdoque d'abstraction relative et en synecdoque d'abstraction

absolue". La première a pour exemple "l'ivoire des dents, les roses de son teint... celle dont la fureur poursuit votre enfance". La seconde s'applique à "la jeunesse pour les jeunes gens, la magistrature pour les magistrats... ou le sexe pour les femmes".

Ces trois contenus de la synecdoque créent une certaine confusion dans le domaine littéraire laquelle peut cependant déboucher sur une réflexion constructive en ce qui concerne la formalisation envisagée comme la base de cette idéo figure utilisant la pluralité et la particularité dans la formulation du trope.

Traiter le problème à l'inverse n'est certes pas chose facile : c'est ce que laisse entendre N. Sato dans son étude "Synecdoque, un trope suspect" (in CNRS, Rhétoriques, sémiotiques, Paris, UGE (10/18, 1979 : 116-127). Certains auteurs ont pu ainsi nier l'authenticité d'un tel trope qui ne serait qu'un substitut de la métonymie car la partie et le tout, l'espèce et le genre, sont toujours pris dans un sens réel et non abstrait. D'autres, au contraire, distinguent plusieurs types de synecdoques désignés par deux termes arithmétiques : la somme et le produit. La somme, "arbre x = peuplier, chêne, saule..." caractérise la relation conceptuelle espèce-genre ou la relation concrète individu-homme dans un rapport entre parties et totalité à caractère matériel et référentiel. Le produit, "arbre = branches et feuilles et tronc et racines", s'applique à une liaison parties/tout définie par un rapport "logique": "x est un arbre" = (x possède des branches).(x possède des feuilles).(x possède un tronc)...

N. Sato propose de distinguer la somme qui "n'a rien à voir, du moins directement, avec la réalité représentée" et qui participerait donc d'une forme d'abstraction, et le produit qui "concerne uniquement la composition empirique de la réalité... sans rapport avec la composition sémantique". Passant aux définitions par extension et compréhension (ou intension), l'auteur conclut qu'il y a synecdoque quand on emploie une expression dont l'extension ou inversement la compréhension conceptuelle est plus grande ou plus petite que celle que le lecteur s'attend normalement à trouver. Cette définition fait donc référence à la triade topique logos-ethos-pathos. Dans une optique voisine, l'approche "réaliste" de la "synecdoque représentation" de K. Burke (in Roig, op. cit., 1977 :110-112) met l'accent sur l'utilisation idéologique dont les exemples sont la "représentation politique" et la "volonté générale", mais aussi "la croyance répandue suivant laquelle l'idéal mathématico-quantitatif des sciences physiques peut et doit servir d'idéal aux sciences sociales" au lieu de se voir reconnaître un rôle de "servante". Ainsi la symbolique autant que le réductionnisme conduisent à une représentation faussée du social qui exige la référence à une "anecdote représentative", soit topique, modélisation, système. Reste que le rapport partie-tout-abstraction présente un caractère numérique fondamental qui peut être concrètement déterminé et abstraitement dépassé dans le calcul mathématique.

Ainsi, il est possible de relier les définitions rhétoriques pour les analyser cas par cas : passant d'une pluralité d'objets concrets ou abstraits à la composition d'un tout englobant des relations entre parties, aboutissant formellement dans les deux cas à une inférence représentative où la synecdoque du nombre est valorisée et développée par catachrèse en extension de termes clés tels que singulier et pluriel, produit et somme, petit et grand, empirie et abstraction.

Dans "sens et dénotation", Frege (op. cit. : 111) ne peut pas éviter l'ambiguïté idéo figurative de la dénotation sous son double aspect sémantique et syntaxique. Inspiré par la synecdoque de la partie, il écrit : "Juger, c'est distinguer des parties au sens de la valeur de vérité. Une partie serait distinguée si on pouvait la référer en retour à la pensée... Mais il faut dire que j'emploie le terme "partie" d'une manière particulière. J'ai transposé le rapport de la partie au tout, d'une proposition dans sa dénotation, et j'appelle la dénotation d'un mot partie de la dénotation d'une proposition quand le mot est lui-même partie de la dénotation". Cette "façon de dire", "contestable" selon l'auteur, implique la construction d'un nouveau sens à deux niveaux : sémantique pour le mot, syntaxique pour la proposition, ce dernier niveau est à noter en raison du rôle qu'il joue dans la formalisation.

Plus loin (op. cit. : 1U2), l'auteur, citant Husserl lorsque celui-ci définit le concept de nombre cardinal, subsumant les nombre deux, trois, quatre ...qui sont le même phénomène concret que le concept de multiplicité..., précise sa définition: "Les totalités [Inbegriffe] sont des tous dont les parties sont liées en une collection. Il faut que nous prenions conscience de ces parties comme de parties appréhendables séparément", cela implique une distinction entre subsumer un objet sous un concept et subordonner des concepts à une multiplicité qui ne doit pas être traitée comme une "représentation subjective, psychologique", car .pouvant être exprimée par la conjonction "et". D'où une double signification sous-jacente: "L'attribution d'un nombre énoncé quelque chose d'un concept. Et je ne disputerai pas si l'énoncé porte directement sur le concept ou indirectement sur l'extension [ou vice-versa] car l'un va avec l'autre..." Cette inférence définitoire constitue une ouverture sur la théorie des ensembles dans les cas extrêmes : "Un concept sous lequel tombe un seul objet a une extension aussi déterminée qu'un concept sous lequel ne tombe aucun objet ou sous lequel tombe une infinité d'objets". C'est donc cette séparation de l'extension conceptuelle et de la totalité objectivée qui sera reprise, précisée, régulée sous une forme axiomatique pouvant être perçue comme la grammaticalisation d'un contre langage.

Cantor introduisit le concept de correspondance bijective entre les éléments de deux ensembles qui permet une mesure par cardinaux jusqu' à une limite transfinie (W) dans le continu des entiers naturels. (W se cantonne au finien formalisant la synecdoque avec le concept d'appartenance d'un élément à un ensemble ($X \in E$) en tant que notion primitive et fondatrice de la mathématique non sans paradoxes sur lesquels nous reviendrons (ensemble d'ensembles, axiome de choix).

III. 5 Liaisons par négation et dialectique

L'interprétation figurative s'adapte ou se substitue aux logiques dans les raisonnements dépourvus ou libérés du déterminisme et du formalisme normatif. La négation et ses modalités sont à l'origine de cette opération intellectuelle fondamentale lorsqu'elle se transforme en un paradoxe permettant un retour à

l'ambiguïté ou à l'incongruité d'un langage souple et adaptable dans une perspective dialectique. C'est cette propriété qui permet de surmonter tout réductionnisme rigoriste.

La rhétorique offre de nombreux exemples de traitement des modalités de la négation en tant que jeu de langage provocateur et inventif (Fontanier, op.cit;377s1). L'ironie "consiste à dire par une raillerie, ou plaisante, ou sérieuse, le contraire de ce qu'on pense ou de ce qu'on veut faire penser". L'antithèse oppose "deux objets l'un à l'autre, en les considérant sous un rapport commun, ou un objet à lui-même, en le considérant sous deux rapports contraires". En revanche, le paradoxe est "un artifice de langage par lequel des idées et des mots, ordinairement opposés et contradictoires entre eux, se trouvent rapprochés et combinés de manière que, tout en semblant se combattre et s'exclure réciproquement, ils frappent l'intelligence par le plus étonnant accord, et produisent le sens le plus vrai, comme le plus profond et le plus énergique". Ces jeux peuvent également se produire dans l'Imaginaire et se manifester par le mythologisme et la fiction, ou encore, dans les figures de pensée, par la rétroaction subjective et la délibération intersubjective.

La dialectique peut être conçue comme une consécration philosophique et épistémologique de ces jeux de langage. Dans La philosophie du non (Paris, PUF, 1940 : 137-138), G. Bachelard précise à cet égard que "la négation doit rester en contact avec la formation première. Elle doit permettre une généralisation dialectique. La généralisation par le non doit inclure ce qu'elle nie". Elle est à la fois "enveloppement de ce qu'on nie" et "élargissement de ce qu'on peut savoir". L'algébrisation du calcul a fait surgir, non sans confusions et controverses, les nombres négatifs qualifiés de racines fausses, impossibles, imaginaires. La négation a dû être formalisée et rationalisée par une régulation de l'emploi des signes "fictifs" dans un calcul "imaginaire" en contradiction avec les calculs pratiques ; elle fut ainsi représentée par le signe "-" pouvant être interprété comme une réduction, une diminution, une restriction, en termes de quantité avant d'obtenir une légitimation mathématique au XIX^{ème} siècle (E. Cousquer, in Dossier sur l'origine des nombres, Cahiers Science et Vie, 57Juin 2000 : 58-60) Exemples : les géométries non-euclidiennes par rapport à la géométrie euclidienne, la constante de Planck "facteur de petite désobéissance" de la physique ondulatoire par rapport à la physique classique. En mathématique, il a suffi de catégoriser l'ensemble des nombres réels pour créer une opposition entre le fini qu'il inclut et l'infini qui l'excède ouvrant ainsi un nouveau domaine d'investigation théorique, la mathématique non standard.

La négation apparaît comme difficilement interprétable en logique. Frege (op. cit. 195 sq) la place d'abord par rapport à une interrogation pour marquer son ambiguïté : "La réponse à une question est une affirmation fondée sur un jugement, que la question reçoive une réponse positive ou négative". Une distinction fondamentale caractérise la négation dans le langage et dans la pensée. Dans le langage, "une proposition où 'ne... pas' figure dans le prédicat peut tout comme une autre exprimer une pensée, et on peut faire de celle-ci le contenu d'une question qui laisse à la réponse le soin de décider, comme il se fait pour toute proposition interrogative." Dans la pensée réside le jugement plus complexe, composé de parties [qui] ont un certain ordre, un enchaînement, entretenant entre elles certaines relations. Mais quelle totalité n'offre pas ces caractères ?" Le vrai et le faux convergent alors avec l'affirmation et la négation vers des inférences variables exigeant :

"1) Une affirmation pour l'assentiment;

2) Une affirmation pour le refus, liée dans un rapport inextricable avec le mot 'faux' ;

3) Les mots de négation comme 'ne... pas' dans les propositions énoncées sans être affirmée" (20g).

Notons qu'une idéo figure par synecdoque combinant une composition hypothétique et des énoncés négatifs forme un tout. Le mot "dialectique" n'est pas employé mais "en pensée" il est bien présent.

"Quand on transpose à la pensée le rapport de la partie au tout" caractérisant les composants et la structure qui confèrent un sens aux propositions, la négation est un cas où "la pensée est la réunion d'une partie:incomplète constituée par l'acte linguistique de nier, et d'une partie complémentaire visant la chose que l'on nie. Le tout trouve alors son unité". C'est le cas en logique, mais aussi, de manière plus souple et projective, en idéo figuration par la jonction de propositions explicites et implicites, par paradoxe ou enthymème. Frege, "se réglant sur le terme grammatical "composition des propositions", forme l'expression "composition des pensées" sans vouloir dire pour autant que toute composition propositionnelle a pour sens une composition de pensées, ni que toute composition de pensées est le sens d'une composition propositionnelle. Les propositions linguistiques formées d'autres propositions n'expriment pas nécessairement une pensée au sens logique dont on peut dire "c'est vrai ou c'est faux, le tiers étant exclu" (215). Cette interprétation réductrice de la pensée logique au principe du tiers exclu, sera par la suite nuancée ou écartée axiomatiquement dans le cadre de logiques probabilistes et de logiques floues plus proche de l'ouverture idéo figurative à la base de nouvelles compositions.

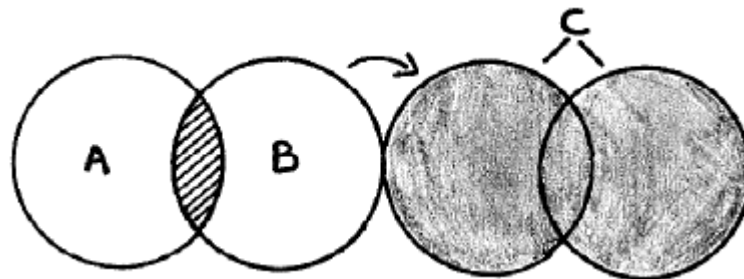
Ces évolutions aboutissent à donner à la transcendance un sens "technique" en tant que procédé permettant de créer et de positionner une forme de complexité révélée par une négation rendue constructive par dialectisation. On peut donc considérer celle-ci comme une manifestation originelle de l'auto organisation grammaticale cognitive du langage accompagnant la persuasion en tant que forme pragmatique mais aussi suscitant le raisonnement en tant que forme d'intellection verbale, substituant le flou et le doute à la clarté et à l'évidence. D'où la formule; "A : oui, mais B".

* * *

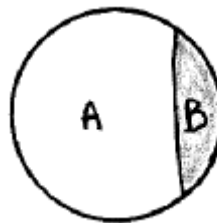
En ce qui concerne les langages mathématiques, il est suggestif d'établir une relation entre les idéo figures et les diagrammes, ce que les linguistes nomment "méta sémèmes" par substitution d'un signifiant à un autre pour procéder à une extension de sens. Cette opération peut s'effectuer de mot à mot mais aussi de mots à graphe ou inversement (J. Dubois et al., Rhétorique générale, Paris, Larousse, 1970 : Chap. IV); elle a joué un rôle fondamental dans le développement de la pensée mathématique depuis l'antiquité grecque jusqu'à la géométrie algébrisée et à l'algèbre topologique. Voici des extensions concernant les tropes et leur sens technique.

La métaphore-perspective utilise la souplesse du langage en tant que représentation^{on} du monde pour définir une chose dans les termes d'une autre en créant une intersection entre ces termes : l'un d'eux est

l'original (A), l'autre ou les autres (B) étant ajouté(s) de manière significative afin de créer un sens nouveau (C).
Exemples : signes, infinité des points de toute droite ou segment, graphismes, fonctions...

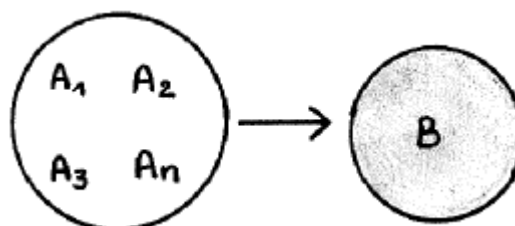


La métonymie-réduction opère par simplification et définition réductrice d'un terme originel (A) en lui substituant le terme employé pour un de ses composants (B) jugé représentatif du tout. Exemples : échantillons statistiques, axiome de choix...

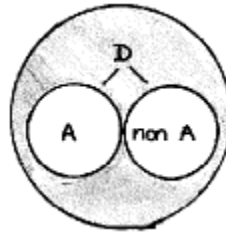


La synecdoque-totalisation est une opération inverse de la précédente consistant à traiter un assemblage d'objets ou d'entités ($A_1... A_n$) séparés mais identiques comme une unité autonome (B).

Exemples : mesures, ensembles, idéogramme de Venn...



La négation-dialectique fait intervenir la perspective unitaire (D) dans un rapport contradictoire ou paradoxal entre deux termes ou deux valeurs (A, non A) que l'on envisage sous un autre angle et/ou selon un autre type de relation. Exemples : Tiers non exclu, analyse non standard, calcul quantique.



Ces liaisons symboliques éclairent le rôle joué par le substrat langagier dans l'idéation formalisatrice par extension de sens, réduction simplificatrice, totalisation unificatrice, paradoxes dialectisés. La linguistique idéo figurative restitue ainsi une auto organisation dynamique des idées et interprétations provisoires, des régulations commodées, des modèles fiables localisés et temporalisés à partir de faits, d'actions, de finalités, repérables par expérience dans un contexte comportant des constantes et des ruptures, source de concepts et de théories diverses évolutives. Cette linguistique doit être située dans un champ cognitif plus vaste appelé "grammaire cognitive" (d'après Lakoff et Thompson, Berkeley Linguistic Society, 1975) ; d'un point de vue topique, elle implique le sujet pensant en tant qu'acteur et qu'objet de recherche opérant dans un cadre pragmatique complexe. C'est ce que tente d'esquisser le tableau suivant centré sur la gestion de l'interface langagière entre pensée et réalité, approche qui sera précisée et développée par la suite.

<u>Inné-acquis</u>	<u>Verbalisation</u>	<u>Idéo figures</u>	<u>Inférences</u>
Capacité et action	Linguistique	Réduction	Régulations
symboliques	structurelle	Dialectique	Théorie
	Information	Abstraction	Logique
Mémoire	Auto organisation	Grammaire	Démonstrations
Sensibilité	langagière	cognitive	Probabilités
Perception	Topique	Représentations	Modélisations
Apprentissage	Signification	Liaisons	Innovations
	Interprétation	Formes	

Ch. IV. Linguistique sémiologique :représentation, interprétation, signification

Selon Saussure (Cours de linguistique générale; (1906, 1911), Paris, Payot, 1969 : 33) la sémiologie concerne "la langue comme système de signes exprimant des idées" comparable à l'écriture, à l'alphabet des sourds-muets, aux formes de politesse, aux signaux militaires, etc... Elle est seulement le plus important de ces systèmes et "on peut concevoir une science qui étudie la vie des signes au sens de la vie sociale" ; il s'agirait d'une sémiologie restant à construire pour relier la linguistique à la psychologie. La mathématique, envisagée sous cet angle, est un système de signes spécialisés et ordonné en formes en vue de créer des sens en extension.

De C. Morris (Foundations of the Theory of Signs, I. 2., Univ. of Chicago, 1938 : 2-3) retenons l'idée d'une sémiotique en tant qu'approche "importante dans un programme pour l'unification des sciences", à la fois "science entre les sciences et instrument des sciences", définition concernant au premier chef la pensée mathématique et les métalangages formels. De plus, "une étude du langage de la science doit utiliser des signes faisant référence aux signes, et la sémiotique doit fournir les signes et principes adéquats pour mener cette étude". Les "signes de signes" occupent une place centrale dans la mathématisation du langage à différents niveaux, des figures aux nombres, à l'algèbre et à des abstractions par inférence. Autant d'interprétations permettant d'approfondir et de prolonger la linguistique idéo figurative.

IV.1. Des signes aux nombres, de l'arbitraire à l'ordre

Historiquement, le passage des signes aux chiffres et aux nombres représente une pensée qui se développa durant des millénaires dans différentes cultures. Concernant ce que G. Ifrah appelle "L'aventure des chiffres ou l'histoire d'une grande invention" (Paris, Laffont, 1994 : tome I) nous ne retiendrons que quelques jugements fondés sur une longue et profonde investigation. Les "échos du passé montrent que les chiffres, loin d'être ces symboles secs et arides ... [dénoncés] comme étant les armes et les vecteurs de notre société technicienne, ont été de tout temps aussi supports de rêve, de fantasme, de la spéculation métaphysique, matériaux de la littérature, sondes de l'avenir incertain ou du moins du désir de prédire. Les chiffres sont d'une substance poétique". Cette variété dans l'interprétation et la signification est le produit d'une "histoire chaotique et tumultueuse", le reflet de l'évolution de la pensée humaine. Elle se situe dans une perspective psychologique et ethnologique voire physiologique, décrite par l'auteur à partir de deux utilisations originelles de la quantification. Le numérotage par un signe-étalon désignant des choses dans une totalité (notation, valeur, puissance, cardinal) ; notons que cette utilisation reste d'actualité et que ces choses peuvent être constituées par des entités chiffrées ; par exemple, dans un code, "917" peut être énoncé "neuf, un, sept" et garder un sens. La numération introduit une information supplémentaire dans l'utilisation en conférant à chaque composante d'une suite ordonnée une marque originale permettant de la repérer et de la situer entre toutes,

d'où la succession de signes distincts (1,2,3...-) expression des nombres (réels, ordinaux) et base du calcul par récurrence.

* * *

Au XIX^{ème} siècle, le développement simultané des mathématiques, de la logique et de la linguistique oblige les penseurs à poser le problème de la nature des connaissances en termes d'épistémologie en rapport avec les sciences physiques et humaines. D'emblée l'analyse des signes, la sémiologie, se trouve placée au centre des nouvelles recherches à la fois philosophiques et formelles.

G. Boole (Les lois de la pensée (1854), trad., Paris, Vrin, 1992 : Chap. I - IV) se donne pour objectif "d'étudier les lois de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement, de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode" généralisable au calcul des probabilités afin de mieux comprendre "la nature et la constitution de l'esprit humain".

La recherche débute par une étude des signes suivant une définition qui se révéla féconde : "Un signe est une marque arbitraire dont l'interprétation est fixée et qui est susceptible d'être combiné à d'autres signes conformément à des lois déterminées dépendant de leurs interprétations respectives". La marque arbitraire concerne le choix "de tel ou tel symbole particulier pour l'associer à une idée donnée" de manière permanente, qu'il s'agisse d'un mot ou d'une lettre. L'interprétation est fixée; peu importe que les signes représentent des 'conceptions mentales' ou des "choses", ils sont soumis "aux lois de ces conceptions et de ces opérations mentales dépendant de la nature de son interprétation".

Un système de signes comporte trois catégories introduisant des formes réductrices de référence.

1°) "Les signes appellatifs ou descriptifs, qui expriment soit le nom d'une chose, soit une qualité ou un état qui lui appartient". Il s'agit de symboles littéraux algébriques tels que x, y, z, dont l'ordre de succession (substantifs, adjectifs) est indifférent, d'où une possibilité de commutation : $x y = y x$. Deux symboles ayant la même signification peuvent donner lieu à une substitution : $x y = x$; $x x = x$; $x^2 = x$. C'est comme dire "des hommes bons, bons..." par anaphore ce qui n'a d'équivalent algébrique qu'avec 0 ($0^2 = 0$) et 1 ($1^2 = 1$) bases d'une algébrisation binaire de la logique. 0 représente le "Rien" en tant que classe et 1 représente "l'Univers" en tant que classe : ils sont "les deux limites de l'extension d'une classe x. La négation $1 - x$ représente "la classe contraire ou complémentaire" des choses non contenues dans x : le produit $x (1 - x)$ ne peut donc exister. Le principe de non contradiction énonce "l'impossibilité pour un être d'avoir une qualité et de ne pas l'avoir en même temps... conséquence de la loi fondamentale de la pensée dont l'expression est $x^2 = x$ ", d'où $x - x = 0$, ce qui donne : $x (1 - x) = 0$ (Anneau de Boole).

2°) "Les signes des opérations mentales par lesquels nous réunissons des parties en un tout ou séparons un tout en ses parties". Les signes de ces opérations soumises à des lois de distributivité, sont +, -, x. L'équivalent littéral est la synecdoque tropique qui sera formalisée par la théorie des ensembles (Supra. III 4).

3°) "Les signes exprimant la relation, et par lesquels nous formons des propositions" : le signe d'identité = pour les mots "si" et "sont" signifiant "se composent", "consistent en". Les particules "si" "ou bien" "ou" indiquent en général des propositions secondaires ou abstraites exprimant, par rapport à une proposition primaire ou concrète, une "relation entre choses" ou une "relation entre propositions". Une proposition primaire peut devenir secondaire si elle affirme la vérité de celle-ci ou sa fausseté. La différence tient alors non pas à la forme mais à l'interprétation. Voici un exemple d'équivalent symbolique de la phrase : "La richesse (w) consiste en des choses susceptibles d'échange (t), limitées en quantité (s), et qui produisent le plaisir (p) ou préviennent la douleur (r)" :

$$\text{Equation: } w = st [p + (1 - p) r]$$

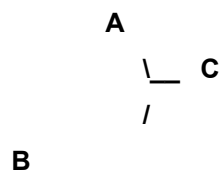
G. Frege (Les fondements de l'arithmétique (1884) trad., Paris, Seuil, 1969 : 115; 188 sq) propose un choix épistémique exclusif : l'arithmétique traite d'objets qui nous sont donnés "immédiatement par la raison, et elle peut les pénétrer totalement, comme ce qui lui est le plus propre". Les "impressions des sens" ne sont pas niées mais elles relèvent d'une autre approche. Ainsi, "le nombre n'est pas un amoncellement de choses, ni la propriété d'un tel amoncellement... il n'est pas non plus le produit subjectif d'un processus psychologique : attribuer un nombre, c'est énoncer une détermination objective d'un concept. La signification du nombre ne réside pas dans sa fonction dans un énoncé mais dans sa nature de substantif : il est un "objet reconnaissable, même s'il n'a aucune réalité physique ou spatiale, ni telle que l'imagination puisse s'en faire une image". Sa définition est une construction à partir de la relation intension-extension.

Un premier principe ordonne de le définir dans le contexte d'une proposition : "ce sont les propositions de recognition" des identités numériques dont il s'agit d'établir le sens "sans employer des noms de nombre ni le mot "nombre". Ces identités se réalisent par l'établissement d'une "correspondance biunivoque entre les objets tombant sous un concept F et ceux tombant sous un concept G... Cette correspondance équivaut à une identité numérique" à l'instar du parallélisme qui définit une direction ou de la similitude définissant une forme, par exemple un triangle. Cette identité rend une commutation possible. La dernière étape du raisonnement consiste à introduire le concept d'extension en tant que terme intermédiaire dont le sens est supposé connu car impliquant une identité ou une ampleur différente. En l'occurrence, l'identité des concepts équinumériques F et G implique que le même nombre appartient à ces derniers. Ce nombre est le nombre cardinal des deux concepts. Une inférence permet ensuite de passer de la notation cardinale à la succession ordinale des nombres naturels de 0 à n. "Le nombre qui appartient au concept identique à 0 [mais qui n'est pas 0] suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres". Telle est la définition de 1 à laquelle l'auteur attribue "une légitimité objective qui n'est subordonnée à aucune constatation", indépendante de toute "condition subjective".

Ce processus définitoire illustre la complexité de l'opération consistant à fonder logiquement les objets mathématiques. La problématique sémiologique ainsi présentée allait se révéler féconde dans d'autres interprétations : syntaxiquement par les axiomes de Peano, théoriquement par l'ensembliste, mais aussi symboliquement à partir des formes des langages.

Une autre interprétation constructive est celle que l'on peut qualifier de contrôle de l'arbitraire du signe par ses interprétations possibles, variées et enrichissantes. On la trouve dans les Écrits sur le signe de C.S. Peirce (1885-1910, trad. Paris, Seuil, 1978 : 89 sq, 132 sq, 215 sq) sous la forme d'une théorie triadique du signe qui pose le problème de la sémiologie formelle en termes de gestion interfaciale du langage. En 1908, il écrit : " [En 1867], j'ai défini la logique comme étant la doctrine des conditions formelles de la vérité des symboles ; c'est-à-dire de la référence des symboles à leurs objets. Plus tard, quand je me suis rendu compte que la science est une recherche et non une doctrine... j'ai compris que pendant longtemps ceux qui se consacraient à la découverte de la vérité concernant la référence générale des symboles à leurs objets seraient aussi obligés de faire des recherches sur la référence à leurs interprétations aussi bien que sur les autres caractères des symboles et non des symboles seuls, mais de toutes sortes de signes..." D'où les liaisons définitoires : "Je définis un Signe comme quelque chose qui est si déterminé par quelque chose d'autre, appelé son Objet, que, par conséquent, il détermine un effet sur une personne, lequel effet, en niveaux ou en puissances de compréhension. En bref, "un signe est quelque chose, A, qui dénote quelque fait ou objet, B, pour quelque pensée interprétante, C". Selon cette définition, "un signe entre dans une relation avec l'esprit", cette relation est irréductible à des rapports dyadiques.

Elle est représentée comme suit



Cette tiercéité rend compte de la complexité mais aussi de la richesse des processus sémiologiques impliqués dans les opérations de gestion des connaissances dans l'interface langagière. Les fonctions signifiantes du signe sont définies comme suit.

La primauté traite d'une qualité dans une définition en intension (qualisigne); un "évènement particulier" ou une chose particularisée par des qualisignes crée une identité par leur matérialisation (sinsigne), une "loi" établie par accord ou convention entre les hommes instaure un "type général" dont les parties sont des "répliques du signe" (légisigne). La secondarité précise la nature informative du signe : l'icône est une représentation d'un objet existant ; l'indice se réfère "aux qualités qu'il peut avoir en commun avec l'objet" ; le symbole est de même nature que le légisigne, étant lui-même un "type général ou une loi" comportant des "cas existants de ce que le symbole dénote", "cas existant dans l'univers et qui peuvent être imaginaires". La tiercéité précise la fonction informative de l'interprétant : le rhème est "un signe de possibilité qualitative" pour l'interprétant, l'information transmise est douteuse; le désisigne est au contraire un signe d'existence réelle, c'est un rhème interprétable ; l'argument est un signe qui, pour son interprétant, est un signe de loi", c'est "un signe qui est compris comme représentant son objet dans son caractère de signe", en bref, un signe de signe. Ainsi, à l'interprétant "affectif" de la primauté et à l'interprétant "énergétique" de la secondarité, succède l'interprétant

"logique" de la tiercéité qui s'applique à un signe "d'un genre intellectuel" et se conjugue à "un temps relativement futur" et surtout "conditionnel". C'est à ce niveau de réflexion que se situe la pensée formelle et la conception du nombre.

Il s'agissait "de concepts à la fois hautement abstraits et abstrus et dont cependant toute la signification serait tout à fait indiscutable... Je n'avais pas plus tôt eu l'idée de ces concepts que je m'aperçus qu'en mathématiques il y en avait autant qu'il y a de mûres dans une haie de ronces..." Les interprétations de ces concepts revêtent toutes la forme suivante : "Procédez suivant une règle générale donnée, puis si un concept donné est applicable à un objet donné, alors l'opération aura un résultat général donné et réciproquement..."

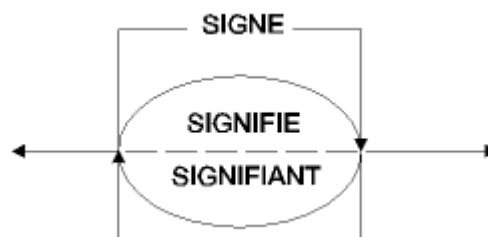
"Prédiquer n'importe lequel de ces concepts [intellectuels, mathématiques] à un objet réel ou imaginaire équivaut à déclarer qu'une certaine opération correspondant à ce concept, appliquée à cet objet, aurait (certainement ou probablement ou possiblement, selon le mode de prédication) un résultat déterminé descriptible en termes généraux".

Cette présentation sémiotique fait intervenir les fonctions sélectives suivantes des signes. "Un légisigne [qui] est une loi qui est un signe. Il s'agit d'un type général qui doit être signifiant". Tout légisigne signifie par son application dans un cas particulier qu'on peut appeler sa réplique. "Par exemple, le mot "the" qui apparaît d'ordinaire en anglais de quinze à vingt cinq fois par page [...] Chaque cas particulier est une réplique et la réplique est un sinsigne" que la loi rend signifiante. C'est aussi le cas du symbole qui est "un signe qui renvoie à un objet qu'il dénote en vertu d'une loi, d'ordinaire une association d'idées générales, qui détermine l'interprétation du symbole par référence à cet objet", lequel est également d'une nature générale, ce qui détermine la particularité des cas existant dans un univers qui peut être imaginaire et auquel renvoie le symbole. Dans ce cas, les signes envisagés en tant que totalité renvoient à un "métasigne", un signe de signes, connoté par des termes tels que "sémiosis" ou "sémiotique" qui donnent un sens à une transcendance pouvant être considérée comme une suite organisée et dynamique d'interprétations susceptible d'aboutir à une limite dicible négativement telle que l'infini ou l'irrationnel.

C'est cette conception ouverte de la connaissance représentée par un résultat général, certain ou probable, factuel ou transcendant, que l'on peut interpréter à partir du schéma suivant :

Loi		Symbole	
Légitime		Signe	
Suite	→	Particulier	
Succession		Général	Transcendance
Ordre		Métasigne	→
			Interprétation
			Opération
		Objet	→
			Résultat
		Réplique	Limite par négation
		Répétition	

Dans cette démarche théorique pour éclaircir la complexité sémiologique de la connaissance, F. de Saussure (Cours de linguistique générale (1906-1911), Paris, Payot, 1969 : 97 sq, 129 sq, 155 sq, 226 sq) apporte des précisions sur "le rôle caractéristique de la langue" en tant "qu'intermédiaire entre la pensée et le son, dans des conditions telles que leur union aboutit à des délimitations réciproques d'unités". La linguistique travaille sur [ce] terrain limitrophe où les éléments des deux ordres se combinent ; cette combinaison produit une forme, non une substance". En rapport avec cette gestion interfaciale du langage, la signification est la base de l'aspect conceptuel de la connaissance qui combine signe, signifié et signifiant. Schématiquement, le signe linguistique est cette entité psychique à deux faces (flèches verticales) ; il est également en rapport avec les autres signes de la langue en tant que système dont tous les termes sont solidaires et interactifs (flèche horizontale) :



L'aspect matériel de la 'valeur linguistique' est constitué par les différences phoniques ou visuelles permettant de distinguer un mot de tous les autres ; ce sont ces différences qui sont porteuses de signification en tant que supports.

L'aspect intellectuel concerne "l'arbitraire du signe", et l'auteur distingue un arbitraire absolu et un arbitraire relatif. Le premier est radical, c'est-à-dire "immotivé". Dans le second intervient "un phénomène qui permet de reconnaître des degrés dans l'arbitraire" qui peut être "relativement motivé":

Exemple : "vingt" est immotivé, mais "dix-neuf" ne l'est pas au même degré parce qu'il évoque des termes composants : dix et neuf, et des termes associés : dix-huit, vingt-neuf. A noter que cet exemple attire l'attention sur un aspect important du passage sémiologique du signe au nombre lequel implique des formes variées interprétables comportant des termes-clés (dix) et des opérations implicites, addition et multiplication (dix et neuf, vingt par quatre).

Ces formes peuvent constituer un indice des motivations et des environnements qui ont présidé à l'élaboration du concept de "nombre" conditionné par une utilisation pratique et limitée ou élaborée et rationalisée. Ainsi, en français, l'addition et la multiplication interviennent de manière juxtaposée entre les deux termes clés dix et cent : l'addition domine dans les rapports les plus simples entre unités et dizaines (de dix-sept à soixante-dix-neuf); la multiplication intervient au niveau des dizaines (quatre-vingts, quatre-vingt-dix-neuf). A partir de cent, la décimalité devient un facteur de désignation autonome et combiné : centaines, milliers, millions... Comparativement, en anglais, cet ordre phonétique limitant l'arbitraire du signe, est réglé dès la première centaine par des suffixes : "teen" pour l'addition, "ty" pour la décimale : seventeen et seventy, nineteen et ninety...

La transformation de l'arbitraire en organisation est la meilleure base concevable pour "tout ce qui a trait à la langue en tant que système". "L'esprit réussit à introduire un principe d'ordre et de régularité dans certaines parties de la masse des signes, et c'est là le rôle du relativement motivé", c'est là qu'intervient "l'instrument grammatical, c'est-à-dire, la règle de construction".

Le rôle de l'analogie est souligné en tant que principe de création de la langue. Elle est "une forme faite à l'image d'une ou plusieurs autres d'après une règle déterminée". D'ordre psychologique et grammatical, "elle suppose [en synchronie] la conscience et la compréhension d'un rapport unissant les formes entre elles". Elle exprime également la dépendance de la parole vis-à-vis de la langue dans une perspective diachronique. Le processus de formalisation est décrit comme l'assignation d'une signification au quatrième signe X d'une équivalence modifiée :

Pardonner / impardonnable // manger / immangeable, etc. → décorer / X

d'où : X = indécorable.

Cette formalisation analogique peut se révéler également trompeuse au niveau grammatical. Exemple : éteindrai / éteindre débouche sur X / = viendre.

C'est alors qu'interviennent des "innovations analogiques, symptômes de changements d'interprétation" de "principes de rénovation et de conservation" (phonétique, écriture, circonstances).

C'est le moment d'insister sur la nouveauté et l'importance de la conception saussurienne de la langue en tant que système, laquelle, selon l'auteur, ne retint guère l'attention des linguistes. A notre point de vue, deux fonctions essentielles de cette novation doivent être soulignées. La première concerne la liaison qu'elle établit avec la logique perçue comme la forme la plus radicale de limitation de l'arbitraire du signe en rapport avec la connaissance, déjà signalée et explicitée par Boole et interprétée par Frege et Peirce mettant en évidence les concepts de loi et d'interprétation, également liés aux concepts d'information, de signification et de communication ; le tout inséparable du système linguistique général formulé par Saussure. La deuxième fonction consacre le statut épistémique de la rhétorique traditionnelle ; il est suggéré par le traitement des formes langagières permettant de passer de l'arbitraire absolu à l'arbitraire motivé, de l'analogie aux règles de construction et d'adaptation du langage. Une telle interprétation peut être considérée comme une ouverture sur la rhétorique présentée, au-delà de l'art de persuader, comme une théorie des formes langagières, comme une linguistique idéa-figurative fondée sur l'analyse dialectique des topos, tropes, figures, connus comme autant de "mécanismes" linguistiques de motivation par référence ou inférence, essentiels dans la création sémiologique, une linguistique indépendante et complémentaire de la linguistique structuraliste, Autant de perspectives sémiologiques par rapport auxquelles il convient de situer et d'éclairer la théorie des nombres qui est au centre de la pensée formelle et mathématique, en tant qu'expression de la créativité langagière.

IV. 2. Les nombres : instruments et finalités du calcul

L'arithmétique est un niveau d'organisation principal des relations entre signe, signifié et signifiant concernant la rationalisation de la composante en extension du langage. Par ordre de succession et de combinaison, elle organise et classe les signes numériques en catégories de plus en plus nombreuses ; elle définit des opérations de base reliant ces nombres, elle compose des nombres de plus en plus complexes.

IV 2. 1. Catégories de nombres

Les catégories de nombres sont définies à partir des propriétés relationnelles des signes ou chiffres : la succession et les relations signes-signes et compositions de signes (égalité, addition, soustraction, division, racine carrée, etc...)

- Les entiers naturels ou entiers positifs (N) sont la succession des nombres en tant qu'unités de mesure interprétables comme quantités qu'il s'agisse d'objets ou de signes délimitant des positions ordonnées sur une droite graduée, éventuellement sans zéro (N^*).

- Les entiers relatifs (Z) sont les entiers négatifs.

- Les nombres rationnels (Q) désignent des rapports entre entiers constitués en fractions pouvant être traitées comme des divisions : $2/1 = 2$, $1/2 = 0,5...$

- Les nombres irrationnels ont un développement décimal illimité et sans ordre ; ils ne peuvent être traités suivant les critères de l'arithmétique classique. Ils se composent des nombres, complexes (C) et imaginaires (i) : π et $\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

Les transfinis généralisent la notion de nombre aux ensembles infinis : les cardinaux mesurent le nombre d'éléments d'un ensemble infini, les ordinaux introduisent la notion d'ordre, fini.

- les quaternions "hypercomplexes" sont l'application des imaginaires (i) en indices de nombres réels (x) dans des opérations algébriques utilisables en physique quantique

- Les nombres premiers et p-adiques seront traités plus loin.

A cette énumération incomplète des catégories de nombres, il conviendrait d'ajouter les marques, notations et symboles alphabétiques et opérationnels (au nombre de 172 cités en fin du Dictionnaire des mathématiques modernes, Larousse, 1969).

Cette complexification sémiologique explique la multiplicité des structures de la mathématique en tant qu'expression de langages en développement constant, en partie aléatoires, où le contrôle de l'arbitraire du signe par d'autres signes est un facteur majeur (M. Mashall, La zoologie des nombres, La Recherche, HS 2, Août 1999 : 110-113). L'imagination des mathématiciens joue un rôle primordial dans l'élaboration de nouveaux systèmes de nombres redéfinissant la succession à partir d'opérations telles que la relation de congruence de Gauss définie par la proposition "l'entier a est égal à l'entier b plus un multiple de " l'entier p" ou "la différence a - b est divisible par p" ou " $a \equiv bp$ " (a est congru à b module p) ou " $a = b + np$: $6 = 4 (1 \times 2) \equiv 4 \text{ mod } 2$; $13 \equiv 137 \text{ mod } 4 = 137 - (31 \times 4)$.

La congruence $x = 1 \text{ mod } 2$ désigne tous les entiers impairs (Cahiers de Science et Vie, 57, Juin 2000 : 69).

IV. 2. 2. Fonctions et conceptions de zéro

L'élaboration et le perfectionnement du système des nombres sont un processus évolutif discontinu, millénaire par la durée. L'invention et la formalisation de zéro en tant que perspective numérique du vide, marque une étape essentielle du passage par métaphore à des formes d'abstraction novatrices et; en premier lieu, à la décimalité.

Selon G. Ifrah (op.cit.:365 sq) le problème s'est posé en Mésopotamie où fut propagée la numération écrite trois siècles avant JC. Le signe "zéro" ne fut pas alors traité comme un nombre mais plutôt comme une

absence de nombre : "une place vide à l'intérieur d'une représentation chiffrée" : un "vide" mais pas un "rien" ou un "néant" un vide numérique en position médiale dans une formule et qui devait devenir opérationnel en position initiale ou finale dans un calcul. Zéro dénote alors l'inexistence paradoxale d'un objet sans signe numérique ; en fait, il introduit dans l'ordre numérique la notion de position qui renvoie au calcul décimal par interprétation inférentielle. Les systèmes positionnels marquent "le dernier degré d'abstraction dans ce domaine [des numérations écrites] dont ils constituent l'ultime perfectionnement après une longue période de gestation..." Le zéro prend alors place parmi les nombres en tant que fonction dans la décimalité et en tant que nombre signifiant une valeur nulle, active dans la multiplication où elle donne toujours un résultat nul.

La régulation décimale des signes chiffrés ouvrait le domaine des nombres à de multiples recherches et démonstrations à la base de la théorie des nombres et de l'algèbre mais aussi des formes normatives et/ou conventionnelles des axiomes formulant des principes et des définitions applicables dans un champ sémiologique grammaticalisé à plusieurs niveaux. Par exemple : tous les nombres étant plus petits, plus grands ou égaux à zéro, les racines des nombres négatifs ne sont pas des nombres possibles. Ils introduisent l'imaginaire (i) dans le calcul (Euler).

Le premier axiome de Péano propose la formule interprétative "0 est un entier naturel", laquelle constitue une affirmation laissant supposer qu'il peut être autre chose. Le quatrième axiome "0 n'est le successeur d'aucun entier naturel" fonde symboliquement le système des nombres sans tenir compte de sa fonction positionnelle et de ses effets imaginaires.

Les axiomes de Zermelo-Fraenkel interprètent la nature de 0 en tant que "vide" noté $\emptyset$: "Il existe un ensemble sans élément (l'ensemble vide)" ce qui présuppose une interprétation ensembliste séparant l'existence autonome des ensembles de celle de leurs éléments dénombrables. La numération est alors faite d'ordinaux dans un numéral au sens de Cantor : "Il existe un ensemble E dont l'ensemble vide est élément, et qui est tel que si x appartient à E, la réunion de x et de {x} appartient aussi à E; cet axiome implique l'existence d'ensembles infinis". Autrement dit, si un ensemble a pour élément un ensemble vide, celui-ci ne peut avoir qu'une fonction d'ordre au niveau 0 ; cela permet d'éviter l'effet multiplicateur de zéro: "Le produit d'une famille d'ensembles non vides est un ensemble non vide". Telle est une des formulations de l'axiome de choix qui a suscité de nombreuses critiques concernant le "non vide" en tant que négation d'une négation. D'où les questions : Que signifie le concept sous-entendu "d'existence d'un élément"? Un ensemble vide, avec 0 éléments, est-il encore un ensemble, un ensemble de quoi ? Une réponse possible : un ensemble défini en intension par une propriété abstraite ou imaginaire formalisée dans une "mathématique libre" (Cantor).

* * *

Zéro représente aussi une valeur limite dans un cadre référentiel tel que les probabilités et le calcul binaire.

En ce qui concerne le calcul des probabilités, l'axiomatique de Kolmogorov ne le mentionne pas. Simplement, "À tout événement aléatoire E de l'algèbre B est associé un nombre réel non négatif $P(E)$ appelé probabilité de E ". "La probabilité de l'évènement certain 'Oméga' est un $P(E) = 1$ ". La fonction de mesure implique cependant une probabilité nulle apparemment implicite mais néanmoins réelle en tant que limite d'une croyance ou d'une certitude pouvant tendre ou s'exprimer par 0 : alors $P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(E)$. En statistique, la probabilité, fondée sur la loi des grands nombres, s'applique à des événements ou à des observations qui ont une existence empirique réelle dont l'aléa total ($0 \leq 1$) a disparu pour l'évaluation de régularités différentes dont la distribution est mesurée à partir de moyennes et d'écart types à la base de "lois" (Poisson, Cauchy, Gauss). Cependant, il est des cas non négligeables où cette distribution vire au "chaos" du fait de la complexité du déterminisme événementiel (jeux de hasard, cas extrêmes) ou de la composition de l'objet étudié (quanta, distribution des nombres premiers vers l'infini) (J.P. Bouchaud, La Recherche, HS 2, Août 1999 : 66-71).

C'est le moment de rappeler la logique de Boole consacrée matériellement par le calcul informatique et les bits en tant que signaux ($0 \leq 1$) programmables dans les ordinateurs. Cette fonction a permis l'élaboration d'une nouvelle conception de la numération fondée sur des expériences offrant une nouvelle interprétation du concept de nombre. C'est ce que propose G.J. Chaitin (Hasard et imprévisibilité des nombres, La Recherche, HS 2, Août 1999 : 60-65) en mettant en doute les fondements des mathématiques tels qu'ils sont définis par les axiomatiques. Dans la lignée des travaux de K. Gödel et de A.M. Turing, l'auteur met en évidence la complexité, l'incomplétude et l'insolubilité du problème ainsi posé. Tout comme il n'existe pas de système cohérent et complet pour l'arithmétique, "il n'existe pas de procédure mécanique pouvant déterminer, pour un programme informatique arbitraire, s'il s'exécutera en un temps fini ou non, une fois mis en route". D'après la théorie de l'information, le programme binaire limité à $\log_2 N$ bits (donc inférieur à N) ne peut traiter un programme dont le résultat est au moins deux fois plus grand. "De l'insolubilité du problème de l'arrêt, on passe au hasard lié à la probabilité d'arrêt ... On considère tous les programmes informatiques possibles ce qui peut se faire en principe à l'aide d'un ordinateur idéalisé, appelé dans le jargon 'calculateur universel de Turing'... La probabilité d'arrêt Ω (oméga), c'est la probabilité pour que, ayant tiré au hasard un programme, celui-ci s'exécute en nombre fini d'étapes". 'Omega' est une probabilité d'arrêt comprise entre 0 et 1 ; elle "est aléatoire ou, plus exactement, elle constitue de l'information mathématique irréductible... Elle est algorithmiquement aléatoire... analogue à un jet de pile ou face" ; elle diffère à cet égard, des décimales de π et de $\sqrt{2}$ qui peuvent être calculées par des algorithmes limités. Ainsi, ce qui est constructible sur une base décimale ne l'est pas sur une base binaire, et une certaine idée platonicienne d'une "réalité mathématique en soi" est remise en cause par le rapprochement avec une réalité physique où le hasard et l'imprévisibilité jouent un rôle fondamental". Ajoutons que le passage d'une extension formelle à une intension fondée sur la caractéristique d'un fait peut être une limite d'une part, un progrès d'autre part.

IV. 2. 3. Suites complexes : nombres premiers et p-adiques

Les nombres premiers, dont la caractéristique est de n'être divisibles que par 1 et par eux-mêmes, constituent des "noyaux" fixes de la catégorie des entiers pouvant être traités comme des objets mathématiques en tant qu'unités de mesure. La succession de ces nombres pose des problèmes fondamentaux aux mathématiciens depuis l'Antiquité, en ce qui concerne la formulation de règles permettant de leur apporter une solution globale. Relève de la conjecture l'évaluation de leur écart allant croissant avec leur grandeur : un écart qu'aucun ordre mesurable algorithmiquement ne permet de mesurer à l'échelle des grands nombres. Parmi les petits nombres, les irrégularités s'établissent comme suit : l'écart le plus fréquent est de 2 jusqu'au nombre 389 (3-5, 5-7... 71-73...) ensuite cette primauté passe à 6 jusqu'à 10^{15} (23-29, 31-37... 83-89...). L'informatique permet de conjecturer une loi possible de l'évolution de ces écarts dominants fondée sur un calcul crédible du produit des nombres premiers suivant un ordre de grandeur : $6 = 2 \times 3$, puis peuvent venir : $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7...$ d'où une accélération de la suite numérique constituée de manière empirique en ensemble transfini. Trois enseignements peuvent être tirés de ces expérimentations concernant le langage mathématique aux prises avec des données qu'aucun ordre calculable ne permet de réguler (H. Cohen (La Recherche, 278, Juil. 1995 : 760-765).

1) La démonstration de la primarité de nombres ayant plusieurs centaines de chiffres est un défi pour la théorie des nombres faute d'un algorithme général ; ce défi est partiellement relevé grâce au développement constant de la capacité des ordinateurs d'où le lien avec le calcul binaire et la mathématique expérimentale (le plus grand nombre premier connu comporte 258.716 chiffres).

2) La distribution des nombres premiers inférieurs à x est une fonction très irrégulière ; quand x devient très grand, elle tend à se comporter comme une moyenne entre deux fonctions d'encadrement : la fonction de Riemann du logarithme intégral de x ($L_i(x)$) et la fonction de Gauss du logarithme naturel de x (x/l_{nx}). Telle est la première approximation d'une catégorie définie d'entiers naturels qui échappe à la preuve théorique en raison de sa complexité.

3) Le même constat s'applique à la conjecture de Goldbach (1742) stipulant que tout entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers ($4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5...$) et que tout entier impair est la somme de trois nombres premiers ($7 = 2 + 2 + 3$, $11 = 5 + 3 + 3...$). Cette conjecture a été établie par ordinateur pour tous les nombres jusqu'à 40^{13} . Cette factorisation primale concerne la détermination "pour un entier non premier, de sa décomposition en facteurs premiers considérés théoriquement comme des "atomes" avec lesquels on peut construire, par multiplication, tous les entiers". Cette décomposition d'un grand nombre de facteurs premiers "parties de la totalité des entiers" reste un défi à la fois théorique en tant que définition privilégiée d'un tout constitué en objet mathématique, et expérimental eu égard aux limites rencontrées par les ordinateurs dans cette opération (le plus grand nombre factorisé comporte 130 chiffres). Ainsi le cadre référentiel constitue une limite pragmatique supplémentaire dans les méthodes modernes de cryptographie chiffrée.

* * *

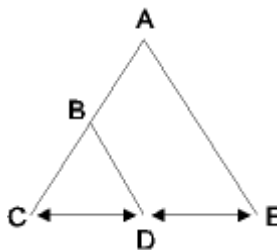
Les nombres p-adiques ($\mathbb{Q}_p$), inventés par K. Hensel, constituent une perspective différente, sur la numération : il s'agit d'une opération permettant de construire un artefact numérique peu accessible par l'intuition sans refuser pour autant toute jonction avec le calcul sous un angle pratique (D. Barsky, G. Christol, La Recherche, 278, Juil. 1995 : 766 sq). Les notions de base sont "la valeur absolue" et la "distance".

La valeur absolue désigne des nombres réels réduits à leur valeur numérique indépendamment de leur signe, notée $|x|$ elle est toujours considérée comme positive : $-x = |x|$, et joignant les rationnels ($\mathbb{Q}$) aux réels ($\mathbb{R}$). Cette neutralisation additive et soustractive en fait un instrument de mesure des distances entre nombres et entre nombres et limites : $(x - y) = |x - y|$, $(-4 + 8) = |12|$. La limite, qui n'est pas un rationnel, permet de définir la limite des suites de rationnels tendant vers zéro ou vers l'infini :

" $U_n = 1/n$ " tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

La distance est également une mesure de proximité caractérisant les rationnels mais aussi les irrationnels non ordonnés comme dans π ou $\sqrt{2}$. Les p-adiques opèrent un transfert sémantique de l'idée de mesure à l'idée de distance et de limite dont la notation est "ultramétrique". Ce transfert revêt une forme métaphorique arborescente que l'on peut représenter par une figure à ramification double dans laquelle

CAE (n) > CBD (n') et CD > DE;



Les analyses p-adiques emploient un mode de calcul original que l'on peut esquisser comme suit. Elles impliquent le choix d'un nombre entier n et d'un nombre premier p ; on divise n par p ou des puissances successives de p : $p^1, p^2, p^3 \dots$. La plus grande puissance r de p par laquelle n est divisible donne la valeur absolue de n ; elle se formule : $|n|_p = 1 / p^r$. "La valeur p-adique d'un entier positif n est d'autant plus petite que n est davantage divisible par p".

Exemples : pour $p = 5$, valeurs p-adiques de :

$n = 26 \rightarrow 26 = 5^0 \times 2 \times 13 \rightarrow |26|_5 = 1$ (1 est exclu par convention des nombres premiers mais non des p-adiques) ;

$n = 50 \rightarrow 50 = 5^2 \times 2 \rightarrow |50|_5 = 1/25$;

$n = 375 \rightarrow 375 = 5^3 \times 3 \rightarrow |375|_5 = 1/125$.

Les nombres p-adiques ont longtemps fait partie des mathématiques "pures". Aujourd'hui, ils représentent une dimension supplémentaire dans la théorie des nombres. Ainsi en est-il de l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui reçoit pour solution le symbole imaginaire $x = \sqrt{-1}$ dans la catégorie des irrationnels. Une solution p-adique est possible si p est un nombre premier de la forme $4n + 1$. Le développement de Hensel permet à l'équation de recevoir une racine dans l'ensemble des nombres 5-adiques. A signaler également les succès remportés en matière de fonctions pour l'utilisation de la fonction zêta de Riemann étroitement liée aux propriétés des nombres premiers et généralisable à de nombreux domaines. Il s'agit, en bref, de développer par des rationnels les valeurs décroissantes d'une variable $S > 1$: $J(S) = 1 + 1/2^S + 1/3^S + 1/4^S + \dots$. Ainsi, les propriétés des nombres entiers peuvent être utilisées dans des analyses p-adiques où elles jouent le rôle de nombres sur une droite graduée, rôle qui demande à être développé, par exemple, dans la physique quantique pour la mesure de valeurs liées à une structure de l'espace temps exprimée, non en nombres réels telle la longueur de Planck (10^{-35}), mais en nombres p-adiques.

Sur le plan sémiologique, en apportant une alternative à l'ordre de succession des entiers naturels, ces nombres peuvent permettre la traduction de certains signifiés en intension dans le monde réel en signifiants mesurables en extension par le calcul éventuellement approximatif, ce qui concrétise par analogie les "puissances" dans les ensembles transnumériques de Cantor. Cependant, il convient de tenir compte également de l'indécidabilité selon Gödel qui pourrait signifier une limite de la numération en général concernant les p-adiques en tant qu'instruments de mesure ordonnés en séquences progressives relevant d'un ordre transfini. Une comparaison avec l'impact théorique des géométries non-euclidiennes n'est pas à exclure.

IV. 3. L'algèbre : formes, constantes et variables

Historiquement, l'algèbre est le produit d'une évolution fort longue et diversifiée, comme celle des nombres, que l'on peut fonder sur l'exploitation d'idées figures par connections et inférences. G. Ifrah (op. cit. II chap. 29) situe ses origines dans l'Inde ancienne où elle utilise des symboles référentiels, les "premières syllabes [des] mots désignant les opérations considérées". La géométrie grecque lui donne une autre dimension à partir des représentations graphiques interprétables formellement (trait, droite, courbe ; surface, carré, triangle, cercle ; volume, cube, pyramide, sphère). Depuis le théorème des proportions de Thalès, on est conscient des rapports entre figures géométriques : ces proportions permettent de reconnaître l'unité de leurs formes de base indépendamment des mesures. Depuis Euclide, on sait qu'un problème géométrique peut recevoir une solution algébrique et vice-versa.

L'idée d'une libération de la pensée par rapport aux langages tant communs que numériques est essentielle pour comprendre le choix de procédés abstraits permettant une économie de formules dans le respect des formes. En effet, l'algèbre se construit par une formalisation sémiologique du raisonnement ponctuel en raisonnement globalisant déterminé par des signes neutres, principalement des lettres permettant

d'éviter la répétition des nombres par une translation en des totalités codées. Cette opération a rendu possible la seule formalisation accessible pour le développement de nombreux raisonnements mathématiques concernant le mouvement, le rapport entre constantes et variables.

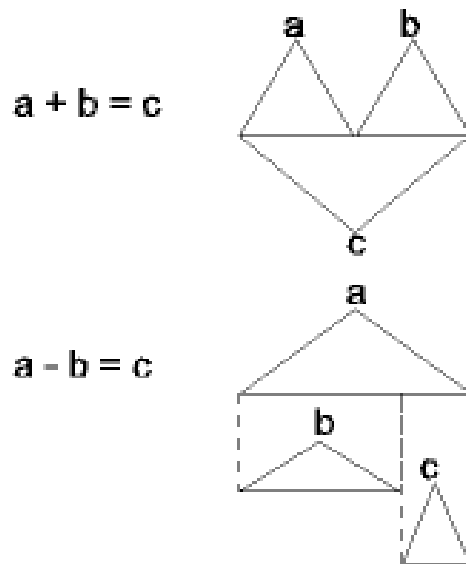
* * *

Il appartenait à Descartes d'exposer et de préciser ces thèmes dans "Les règles pour la direction de l'esprit (Oeuvre complètes, La Pléiade, 1953 : 106 sq). La règle XV reconnaît qu'il est utile de tracer des figures et "de les montrer aux sens externes afin que, par ce moyen, notre pensée soit plus facilement tenue attentive". Cette précaution une fois prise références, la règle XVI précise, en ce qui concerne les représentations, qu'elles doivent être constituées par des "signes très courts plutôt que par des figures complètes"; cela favorise la mémoire et l'unité de la pensée. La voie est ainsi ouverte vers la géométrie algébrisée. Elle est présentée comme suit.

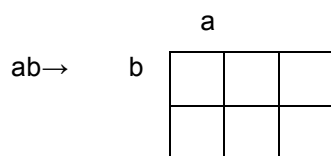
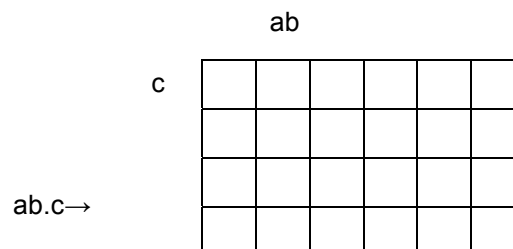
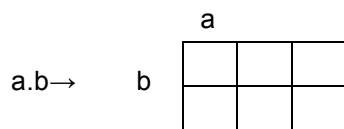
1) Distinguer dans les équations les grandeurs connues (a,b,c) et les grandeurs inconnues (A,B,C) ;

2) Utiliser les chiffres pour exprimer le nombre de relations ($2a^3$) ;

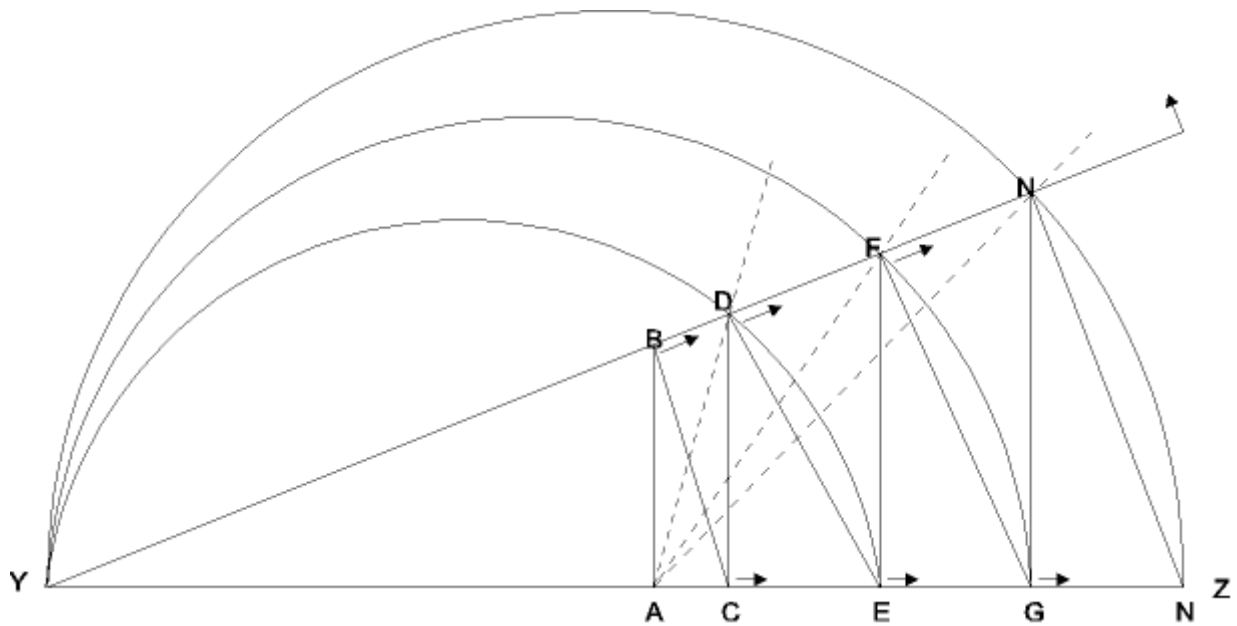
3) Substituer au calcul compliqué et inutile pour l'analyse des formules, ces signes demeurant distincts et informatifs. Ainsi la grandeur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est mieux comprise par la relation $\sqrt{a^2 + b^2}$ que par le calcul $\sqrt{u}$. Les opérations arithmétiques sont géométrisées (Règle XVIII) par une représentation linéaire pour l'addition et la soustraction :



Sous forme de rectangles pour la multiplication et la division :



Dans La géométrie (op. cit. : 248 sq), Descartes introduit l'idée d'un mouvement continu afin de décrire les lignes droites ou courbes à partir de déplacements suivis et réglés de points les uns par rapport aux autres, ce qui permet de "toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure". L'opération est présentée de manière concrète par un jeu de règles matérielles représentant des quantités variables et glissant perpendiculairement et corrélativement sur deux règles mobiles (yx, yz) représentant des quantités constantes dont voici le schéma fléché :



Lors l'angle xyz est fermé, les points BCDEFG sont assemblés au point A, point de départ des mouvements vers x et y. Le déplacement des points mobiles se fait par des droites perpendiculaires aux deux axes se "poussant alternativement : $BC \rightarrow CD$, $CD \rightarrow DE$, $DE \rightarrow EF$... Diverses formes de courbes sont ainsi engendrées par le mouvement angulaire, par exemple, les cercles centrés sur yz de AB à GF. D'autres courbes sont envisageables et repérables à partir d'autres opérations significatives telles AD, AF, AH, et bien d'autres pouvant "servir aux spéculations de géométrie".

Ainsi instrumentalisé, le théorème des proportions de Thalès devient la forme de la géométrie algébrisée. Suit en effet une démonstration sur "la façon de distinguer toutes les lignes courbes en certains genres et de connaître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites". S'agissant de lignes géométriques, "on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte".

La définition du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz est une étape exceptionnelle pour la sémiologie formelle (S.B. Diagne, Boole, l'oiseau de nuit en plein jour, Paris, Belin, 1989 : 72-77).

L'écriture mathématique de Newton a pu être caractérisée par sa notation "fluxionnelle" liée à son "géométrisme" dynamique utilisant une métonymie simplificatrice, à savoir : le mouvement d'un point en rapport avec l'écoulement d'un temps. Ce rapport est défini à différents niveaux graphiques. La "fluente" est la trajectoire d'un point en fonction d'un paramètre constitué par la quantité de temps (notée x) ; la "fluxion" est l'accroissement de la distance parcourue en rapport au temps mis (noté x) ; la "fluxion de cette fluxion" est l'accélération ou dérivée seconde (notée x), etc... Cette conception est étroitement liée aux signes graphiques avec, pour référence, la vitesse d'un mouvement représentée par des courbes et leurs tangentes dans un espace vectoriel.

Pour Leibniz, le calcul infinitésimal est fondé sur un système de signes ordonné : "une caractéristique, autrement dit, une écriture (ou un idiome) peut se révéler meilleure qu'une autre tout en exprimant la même chose, parce que plus commode lors qu'il s'agit d'effectuer certaines procédures". Ainsi en est-il des chiffres arabes par rapport aux chiffres romains, mais aussi des règles adaptatives et simplifiables qui orientent la formalisation, ce que fait la Monadologie (Paris, Delagrave, 1975:160sq) en citant "les mathématiciens chez qui les théorèmes de spéculation et les canons de pratique sont réduits par l'analyse aux Définitions, Axiomes et Demandes". L'écriture leibnizienne se libère des figures géométriques pour constituer en objets de connaissance dans l'ordre symbolique des signes, la différenciation dont la notation dx/dy désigne les variables liées, représentant des quantités conçues abstraitement comme dans l'égalité $dz/dx = (dx)/(dy) \cdot (dy)/(dz)$ laquelle permet de traiter trois quantités x, y, z relevant de la théorie des nombres et des calculs : égalité, addition, soustraction, multiplication, division, exponentiation. Les règles deviennent alors applicables à des quantités infinitésimales maximales ou minimales. Les signes étant arbitraires, ils se prêtent aux combinaisons les plus complexes élaborées par des raisonnements n'excluant pas une argumentation fondée sur des idéo figures par connexion et inférence comme dans cette comparaison ; "Une vieille ville regardée de différents côtés paraît tout autre, et est comme multipliée perspectivement.; Il arrive de même par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque monade". Ainsi, l'abstraction "est le moyen d'obtenir autant de variété qu'il est possible, mais avec le plus grand ordre qui se puisse, c'est-à-dire, c'est le moyen d'obtenir autant de perfection qu'il se peut". Suit une référence à la règle divine qui se manifeste dans la création par une vision synecdoquique de la représentation du tout par la complémentarité, des monades consacrées aux parties. Le substrat linguistique débouche ainsi sur un fondement théologique de la validité d'une hypothèse indémontrable ; une dérive abstractive qui devait être remplacé par la mathématique du transfini.

Corrélativement intervient un changement de sens des termes équation, fonction, droite, courbe... Linguistiquement on peut l'interpréter comme une manifestation de catachrèse adaptative réalisée par métaphore formelle ou rationnelle notamment lors que les équations passent du couple de relations connues-inconnues au couple constantes variables. Sur le plan analytique, les idéo figures par connexion et inférence permettent la création d'un nouveau système sémiologique associant figures et démonstrations, privilégiant des relations syntaxiques entre objets mathématiques tels que les coordonnées des points d'une courbe dans un espace métrique.

La continuité logique de l'oeuvre cartésienne est assurée par les critiques nuancées de C.S. Peirce dans ses Textes anticartésiens (Essai introductif de J. Chenu, trad., Paris, Aubier, 1984 : 146-147). Selon cet auteur, Descartes n'aurait "jamais songé à distinguer une idée qui paraît claire d'une idée qui est réellement telle". Cependant, "il entendait sans doute [que les idées] doivent être soumises à l'épreuve de la critique dialectique, qu'elles doivent non seulement sembler claires au premier abord, mais que la discussion ne doit jamais pouvoir découvrir d'obscurités dans ce qui s'y rattache". Cette oeuvre se voit reconnaître le mérite de "mettre de l'ordre dans nos croyances actuelles"; correspondant à un stade dépassé de la logique, elle doit conduire à "quelque chose de plus assorti aux moeurs modernes". L'incontournable évolution langagière sur la base d'idéo figures se manifeste à nouveau. Concernant l'algèbre, Peirce (Ecrits sur le signe, op. cit. : 146-150) y voit un art de la

formule que l'on peut manipuler : "on est [alors] guidé par des découvertes antérieures qui sont incorporées dans des formules générales. Ce sont des schémas que nous avons le droit d'imiter dans notre façon de procéder et qui sont par excellence les icônes de l'algèbre" dont les lettres sont des "blancs à remplir avec des emblèmes". Dans cette sémiotique, "la preuve rhétorique" a sa place : "Ainsi une formule algébrique est une icône devenue telle par les règles de commutation, d'association et de distribution des symboles". En bref, une interprétation qui peut paraître arbitraire, mais qui permet la découverte d'autres vérités, à l'instar de la géométrie algébrisée.

C'est ce que confirme une définition moderne, celle de J.L. Verley dans le Dictionnaire des mathématiques (Encyclopédia Universalis, Paris, A. Michel, 1997 : 13) lorsqu'il se réfère aux travaux des mathématiciens allemands sur les nombres algébriques, les corps et les anneaux commutatifs, les considérant comme une "introduction du langage géométrique en algèbre commutative. L'algèbre linéaire prend une grande importance lorsqu'après une axiomatisation convenable, les mathématiciens s'aperçoivent du caractère linéaire de nombreuses situations et de l'importance du processus de linéarisation. Et "comme la mathématique est un organisme dont la force vitale a pour condition l'indissoluble union de ses parties" (Hilbert), l'algèbre a rejoint avec succès l'analyse par la considération simultanée, sur un même ensemble, de structures algébriques et topologiques (constituant ainsi la branche des mathématiques appelée algèbre topologique)".

* * *

D'après Verley (op. cit.: 12 sq), "l'algèbre au sens moderne, à savoir l'étude des structures algébriques indépendamment de leurs réalisations concrètes, ne s'est dégagée que très progressivement au cours du XIXème siècle, en liaison avec le mouvement général d'axiomatisation de l'ensemble des mathématiques et la préoccupation constante des mathématiciens de substituer les idées au calcul. Jusqu'alors le propos essentiel de l'algèbre avait été la résolution, par des formules explicites, des équations...", par la suite furent "introduits des êtres mathématiques de nature nouvelle qui présentaient entre eux des analogies étroites dans leur maniement et, par suite, fut ressenti "le besoin de dégager ce qui pouvait être "commun à toutes les situations". Les mathématiciens furent ainsi amenés à penser que la "nature" des objets mathématiques est au fond secondaire".

Il est possible de parler à cet égard d'une nouvelle "philosophie mathématique" mais qui, apparemment, ne contredit pas la conception du calcul infinitésimal de Leibniz. La modernisation a consisté en un changement de fondement, passant de la méta physique à la scientificité, mais respectant et perfectionnant un langage abstraitif hors contexte et imaginaire déjà existant. Deux idées-forces caractérisent la continuité de l'algèbre dans son évolution. Premièrement, la sémiologie idéo figurative par connexion et inférence à partir "d'ensembles munis d'une notion de convergence et de lois de composition continues pour cette notion de convergence". Il s'agit principalement des "groupes" en tant qu'ensembles munis d'une loi de composition interne $(x, y) \rightarrow x * y$, associative $[(x * y) * z = x * (y * z)]$ et commutative $(x * y = y * x)$. Ces groupes comportent des invariants ; ainsi, "la donnée d'un espace et d'un groupe de transformations opérant sur cet espace définit une "géométrie" qui est l'étude des propriétés qui restent invariantes lorsqu'on applique les transformations du groupe" (cas de la

géométrie métrique constituant un "langage commun" pour les géométries euclidienne et non-euclidienne). "La notion d'anneau dégage sous forme abstraite les analogies constatées par exemple dans le maniement des nombres entiers relatifs et des polynômes" (addition, multiplication). Les "corps" définissent des catégories de nombres algébriques : sous-corps du corps des nombres complexes, calcul des congruences modulo un nombre premier, nombres p-adiques. Les "idéaux" sont des nombres (x_i) introduisant dans un anneau une loi de composition entre ensembles d'éléments

$$(p_i) : x_1 = p_1 p_2, \quad x = p_3 p_4, \quad x_3 = p_1 p_3, \quad x_4 = p_2 p_4.$$

Deuxièmement, l'objectif de l'algèbre reste l'abstraction cohésive et constructive des connaissances formulées à partir de propriétés formelles. Des liaisons aux ensembles, des analogies aux calculs, des théories aux axiomes, le langage algébrisé est un substrat sémiologique à des processus d'induction logique allant du concret opérationnel à l'abstrait fondateur, énonçant et exploitant les potentialités cognitives des processus. Par exemple, le "mariage fréquent de l'algèbre et de la topologie a conduit à étudier axiomatiquement ces situations, introduisant ainsi de nouvelles structures très utiles et très riches qui jouent un rôle essentiel dans de nombreuses théories mathématiques contemporaines", par exemple, les espaces vectoriels topologiques, les groupes topologiques.

IV. 4. Abstractions idéo-figuratives : sémiotiques ensembliste et paradoxale

La logologie comporte une analyse des significations impliquées par les formes mathématiques qui ont été exposées. Le substrat langagier a accompagné la modernisation de la pensée mathématique qui doit être interprétée comme le produit d'une gestion particulière mais évolutive et dialectique de l'interface langagière, non sans limites en ce qui concerne le rapport entre intension et extension des concepts et des théories : une capacité de synthèse accrue limite la quantité d'information signifiée. Les divergences suscitées par le problème des fondements et des axiomatiques, pouvant apparaître comme la manifestation d'une "crise" ou au contraire d'un "âge d'or", sont autant d'ouvertures épistémiques fondées sur des topiques et topoi concernant des localisations idéelles dans un espace grammatical cognitif qui se diversifie et se divise comme l'exige la complexité des univers théoriques élaborés par des sujets pensants à partir d'intuitions, d'évidences, de perceptions, d'inférences, destinées à maîtriser par divers arrangements sémiotiques l'arbitraire toujours présent des signes.

IV. 4. 1. Sémiotique ensembliste

Ce qu'on a pu nommer "manifeste idéologique de Bourbaki" en mathématiques s'est manifesté, principalement en France, par un pouvoir intellectuel développé sur un plan institutionnel (M. Mashall: Bourbaki, une société secrète de mathématiciens, Pour la Science, HS, Fév. Mai 2000 : 45 sq, 74 sq). Ce pouvoir retient

d'abord l'attention par son effet réducteur concrétisé par l'exclusion à priori de secteurs mathématiques tels que "la théorie des probabilités, l'informatique théorique, la théorie des jeux, la théorie de l'optimisation, etc...". Cette exclusion est fondée sur une conception restrictive de la mathématique "pure" excluant tout lien avec la mathématique "appliquée" car fondée sur une unité synthétique reposant sur la méthode axiomatique et structuraliste. Une telle unité fut d'abord mise en question dans "L'architecture des mathématiques" : "On peut se demander si cette prolifération exubérante [de résultats mathématiques] est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté... ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques". Plus tard intervient l'option unitaire normative dans les "Eléments de mathématique" : "Nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été". Ainsi, des "résultats mathématiques" on passe à la "science mathématique" au singulier, ce qui n'est pas sans rappeler la théorisation positiviste. D'un point de vue linguistique, cette opération peut être interprétée comme une synthèse de multiples langages référencés en une langue abstraite impliquant "l'observation correcte des règles de la syntaxe" définie normativement par une axiomatique et des structures. Il est d'ailleurs remarquable que l'influence du bourbakisme, se soit manifestée au-delà de la mathématique dans un domaine littéraire proche du surréalisme (R. Queneau) et dans les sciences humaines avec J. Piaget, par un rapprochement de "structures" entre mathématique et processus cognitifs chez l'enfant. Ces analogies méritent d'être retenues pour une approche plus profonde des liens pouvant exister avec la linguistique structurelle de Chomsky (Infra).

La représentation ensembliste peut être considérée comme une forme de référence abstractive par synecdoque qui est exposée dans la "Théorie des ensembles" (N. Bourbaki, Livre I, Paris, Hermann, 1954 : 2 sq, 21; 60-61, 72), Dès l'introduction est posé le problème du rapport entre le langage courant et le langage formalisé. "C'est par une comparaison plus ou moins explicite avec les règles d'un langage formalisé que se fait l'essai de correction d'un texte mathématique. La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir". Peu importe le sens des mots et des signes, "seule importe... la syntaxe". "Un même calcul algébrique... peut servir à résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou des francs sur des paraboles ou des mouvements uniformément accélérés". Tel est le sens que l'on peut donner à une dé-sémantisation compensant une perte d'information par une synthèse théorique, expression d'un langage "métamathématique" dans lequel pourront s'insérer "les diverses branches des mathématiques" sans prétendre "légiférer pour l'éternité". "Le principe est la liberté d'emploi des langages : langage courant et formules du calcul algébrique, excès de langage courant pour rendre accessible la formalisation intraduisible, emploi des ressources de la rhétorique qui devient dès lors légitime pourvu que demeure inchangée la possibilité de formaliser le texte" (exemple cité : la théorie des entiers et des cardinaux). Les contradictions ne sont qu'une invitation à reconsidérer le texte formalisé écrit pour démontrer son impossibilité. Une interprétation à retenir : l'unité de la science mathématique repose sur l'unité du langage, de même que l'art de parler repose sur la grammaire, "de même la méthode axiomatique a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés ; mais sa pratique consciente ne peut reposer que sur une connaissance des principes généraux gouvernant ces langages et de leurs relations avec les textes mathématiques courants".

Les considérations qui précèdent légitiment des définitions qui orientent les raisonnements à partir de pré-supposés interprétables et -interprétés de manière univoque à partir d'une théorie (T) suivant des axiomes explicites ou des constantes de cette théorie, ou suivant des règles de cette théorie appelées schémas (R de T) dont l'application est un axiome implicite de T. "Intuitivement, les axiomes représentent, soit des assertions évidentes, soit des hypothèses dont on s'apprête à tirer des conséquences. Les constantes représentent des objets bien déterminés... Au contraire si la lettre x n'est pas une constante, elle représente un objet complètement indéterminé..." (chap. I, § 2).

Les définitions suivantes éclairent l'utilisation idéo figurative de la forme de synecdoque à la base de la notion d'ensemble ou d'assemblage en tant que "signes de signes, de signes..."

S'agissant des ensembles : "Du point de vue "naïf", beaucoup d'êtres mathématiques peuvent être considérés comme des collections ou "ensembles" d'objets. Nous ne chercherons pas à formaliser cette notion, et dans l'interprétation formaliste de ce qui suit, le mot "ensemble" doit être considéré comme strictement synonyme de "terme" ; en particulier, des phrases telles que "soit X un ensemble". ...ne sont introduites que pour faciliter l'interprétation intuitive du texte". Le terme qui définit la théorie prend ainsi un sens relatif pour la "commodité" du langage.

Suit la définition 1 (de l'inclusion) :

"La relation désignée par : $(\forall z) (z \in x) \rightarrow (z \in y)$

dans laquelle le rapport entre x et y se note de l'une quelconque des manières suivantes :

xy , $y \in x$, "x est contenu dans y", "y contient x", "x est une partie de y", "x est un sous-ensemble de y". La relation non (xy) se note $x \not\in y$ ou $y \not\in x$.

A noter que dans cette définition, la formule de départ contient z qui n'est pas mentionné par la suite, elle constitue cependant la base de la notion littérale d'inclusion ou d'assemblage relevant moins de l'intuition que d'une convention métamathématique telle que : l'application de tout z dans x implique son application dans y (chap II, §1).

La définition 3 concerne la correspondance entre graphe et ensemble. "Soient G un graphe et X un ensemble. L'ensemble des objets qui correspondent par G à des éléments de X s'appelle l'image de X par G et se désigne par $G(X)$ ". Egalement par définition, tout élément de G est un couple pouvant s'énoncer par "y correspond à x par G" (Chap. II, §3). Ces définitions formelles abstraites ont donné lieu à des développements significatifs à partir de représentations graphiques constituant une référence éclairante parce qu'ordonnée entre objets et éléments. Une sémiologie ensembliste fut ainsi développée par G.Z. Braun et J. Los (A la découverte de l'algèbre, trad., Paris, Marabout Université, 1962 : Chap. III) . Dans une perspective théorique voisine, ces auteurs appliquent la notion d'ordre aux nombres et aux signes relationnels '<' et '>' exerçant leur effet sur une

suite de nombres appartenant à un même ensemble. C'est cette appartenance (e ce) qui permet de définir des relations d'ordre concernant les relations entre éléments. Par exemple :

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$ ou $a < b$ et $0 < c \rightarrow ac < bc...$

Les diagrammes de Venn permettent de distinguer des aires de définitions numériques et des aires de valeurs diverses liées par un rapport ensembliste fonctionnel, cette représentation a contribué au prestige de la théorie des ensembles :

Graphe des valeurs ordonnées d'une fonction $y = f(x)$

$1 \rightarrow A$
 $2 \rightarrow B$
 $3 \rightarrow C$
 $4 \rightarrow C$

Tableau de représentation linéaire

X définitions	1	2	3	4
Y valeurs	A	B	C	C

IV. 4. 2. Sémiotique paradoxale

Au niveau le plus général, les formes abstraitives sont l'expression de la complexité inhérente à la gestion duale de l'interface langagière dont la polarité impose deux herméneutiques inverses (G. Durand, L'imagination symbolique, Paris, PUF, 1968). La "crise" des fondements de la mathématique relève de paradoxes et d'oppositions dont la jonction ou la dialectisation fait problème, et qui ne peuvent être dépassés que par intuition, discussion et innovation ouvrant de nouvelles perspectives cognitives acceptables et acceptées. Les interprétations exposées par la suite sont le reflet d'un débat aux multiples facettes et qui remonte très loin dans le temps, débat qui a conditionné la remarquable évolution des langages mathématiques à l'instar de tous les langages en quête de signification et d'adaptation entre référence et inférence, entre logique et imagination, dans une perspective sémiologique et symbolique.

Le paradoxe d'Achille et de la tortue formulé par Zénon d'Elée voici deux millénaires et demi, offre une excellente et toujours actuelle introduction aux théories contemporaines. Achille ne peut pas rattraper une tortue cheminant devant lui par ce que chaque fois qu'il atteint une place qu'a occupé la tortue, celle-ci l'aura quittée et sera donc toujours plus avant (Delachet A., L'analyse mathématique, Paris, PUF QSJ, 1969 : 12-13). Ce qui est pris en considération dans cette fabulation, c'est l'effet symbolique des positionnements en fait dissociés sur, deux suites linéaires qui sont présentées en principe comme identiques. Le déplacement de la tortue est évalué de manière discontinue à partir de chaque position occupée dans une suite théorique de séquences relevant d'un trajet indéterminé situé hors limite temporelle ; alors que le parcours d'Achille doit être calculé à partir du rapport fini entre distance et temps réels. Cette dualité de mesure met en évidence la fonction cardinale et ordinale des nombres ainsi que les caractéristiques de l'infini et du fini, cela dans une combinaison de perspectives synchronique et diachronique par connexions idéo figuratives.

Parmi les interprétations contemporaines, signalons la tentative pour unifier la mathématisation du langage à partir d'une topique fondée sur Une logique de la communication (P. Watzlawick et al.(trad:) Paris, Seuil, 1972 : 8, 18, 69, 272). L'accent est mis sur des propriétés de la notion de communication en vue de les transformer en termes-clés ou lieux communs conceptuels, les mathématiques étant présentées comme un référent analogique en tant que langage : "Il doit être bien clair qu'il ne s'agit pas pour nous que d'un langage, langage éminemment apte à exprimer des relations complexes, mais cela ne signifie nullement que nous avons estimé déjà quantifiables les données dont nous nous sommes servis". Ce manque résulte d'analyses portant essentiellement sur des citations littéraires présentées comme des modèles définitoires et non pas prédicatifs de processus de base de la communication : la fonction, l'information, la rétroaction, le contexte ; modèles situés dans la continuité de la "notation symbolique" de l'algèbre qui avait ouvert un nouveau domaine à l'information par lettres, variables et relations. Cette formalisation, bien que très spécialisée, permet cependant à la psychologie expérimentale d'élargir son champ conceptuel en intégrant tout ce qui est "neurologiquement fonctionnel". Les concepts de "changement, mouvement, investigation, exploration" viennent alors se substituer aux "choses" dans une logique de communication incontournable. "Le paradigme symétrie-complémentarité [de l'échange communicationnel] est peut-être celui qui se rapproche le plus du concept mathématique de fonction, les positions des individus n'étant que des variables susceptibles de prendre une infinité de valeurs dont le sens n'est pas absolu, mais n'apparaît que dans leur relation réciproque". Il resterait à définir les cas où une telle procédure n'aboutit à aucune solution acceptable. Formellement, c'est la théorie de l'indécidabilité de Gödel que les auteurs proposent de considérer comme "l'analogie mathématique de ce que nous pourrions appeler le paradoxe fondamental de l'existence de l'homme en tant que sujet tendant à délimiter un monde (son monde) dans un monde illimité en lui-même". Notons que c'est à ce niveau qu'intervient la pensée verbalisée basée sur une grammaire cognitive où interviennent analogies, affirmation, négations, réductionnisme, sublimation, règles, exceptions... en bref : les idées.

Pour I. Stewart (Les mathématiques, trad., Paris, Belin, 1989 : 7, 236), "Les mathématiques, ce ne sont pas les symboles et les calculs... Les mathématiques ce sont des idées, et plus précisément l'analyse des relations entre ces idées et leurs prolongements... Il ne s'agit pas tant de trouver la bonne réponse que de comprendre pourquoi il y a une réponse et pourquoi elle prend telle ou telle forme. La bonne ma-

thématique pratique l'économie de pensée et elle réserve des surprises ; par-dessus tout elle doit signifier quelque chose... La thèse, développée dans cet ouvrage repose sur une "conception idéologique" renvoyant principalement aux "mathématiques pures" dont l'objectif est "avant tout de faire avancer la connaissance mathématique elle-même, et pas d'apporter des solutions à tel ou tel problème" concret, encore qu'entre les deux conceptions, "il n'y [ait] pas de frontières nettes". L'image à retenir n'est pas celle d'une oeuvre artistique surréaliste, il existe cependant des "exemples de théories mathématiques qui n'ont été développées que pour leur beauté et qui trouvent soudain des applications importantes".

D'où l'importance du secteur temps développé par J. Desanti dans Les idéalités mathématiques (Paris, Seuil, 1968 : 89, 132). La temporalité c'est justement ce qui permet de situer les idées dans la communication : elle règle le champ de la conscience en exprimant "la relation des moments constitutifs de sa structure", permettant de passer par médiation d'une modalité d'une théorie 1 actuelle à une modalité d'une théorie 2 élaborée à partir "des potentialités duales d'une position d'idéalité dans un champ théorique". L'idéalité est également présentée comme "une forme d'axiome" comportant une double indication : "un système de possibilités de médiations d'horizons" ; "une conscience de règle permettant l'effectuation, dans un champ d'objets déjà produits, des systèmes de propriétés accessibles en lui". Un exemple est "la catégorie 'ensemble de points ayant les propriétés naturelles de LR, débouchant sur une équivalence entre les points de la droite et les nombres réels. L'objet 'ensemble de points' manifeste une dualité de sens. D'une part, il s'articule sur le "domaine naturel pour lequel sa médiation est requise", il apparaît alors comme le "noyau indéterminé de ses propres possibles". D'autre part, il formule la norme des "relations sur (et entre) les classes d'objets que ces propriétés désignent: être dénombrable, être mesurable, être fini". Ainsi s'effectue la médiation entre un "pôle des possibles" principalement défini en intension et un "pôle catégoriel" défini en extension suivant une relation circulaire entre normes complémentaires.

Les critiques des mathématiques "pures" et la valorisation de leur interprétation sémantique ne conduit pas à des conclusions différentes de celles qui viennent d'être exposées ; elles illustrent l'effet de perspective par connection et inférence propre à tout langage. C'est ce que fait D. Nordon dans son ouvrage Les mathématiques pures n'existent pas (Paris, Actes Sud, 1993 : chap. V, VI) lorsqu'il aborde la question du point de vue du langage et de sa spécialisation dans les représentations qu'il donne de la réalité suivant l'hypothèse de Whorf : "La vision qu'un homme a du monde est influencée par le langage que parle cet homme... Et l'approche de la réalité à laquelle la science moderne est en train de se livrer par le biais des mathématiques, n'est qu'une approche à travers un cas particulier [celui des langues européennes] de la relation existant entre la réalité et le langage". Le trait commun à toutes ces représentations tient à la diversité des formes métaphoriques de tout langage qui régissent un ordre plus focalisé sur l'espace et la géométrie en ce qui concerne les mathématiques. Par exemple, la représentation du temps et des temporalités est problématique en ce qui concerne les définitions en extension : le temps est alors réduit à un marquage de dates par des nombres réels ($t_1, t_2, t_3...$) permettant une expression algébrique de l'amplitude de la durée ($t_1 - t_2$). Ce temps abstrait est cependant rhétoriquement suggéré par des expressions telles que "une variable approche une limite" ou par le concept de fonction qui évoque le mouvement. Dans cette interprétation deux approches paraissent également suggestives et importantes : l'une utilise des formes spatiales comme intermédiaires vers une conception de la

temporalité positionnée : par des représentations graphiques, moyens de compréhension des diagrammes, schèmes et tableaux ; l'autre s'inspire de raisonnements tels ceux de Cantor sur le transfini pour évaluer des rapports de puissance explicative indéterminée mais temporellement finis. Dans tous les cas, il s'agit d'une utilisation de formes de conversion idéo figuratives relevant de la sémiologie.

"Toute réflexion sur les fondements des mathématiques, sur les problèmes de non-contradiction, sur l'infini, est confrontée d'emblée au problème de l'intervention du temps dans les mathématiques : les termes "infini potentiel" et "infini actuel" sont on ne peut plus expressifs". Ajoutons que c'est la vocation des langages de se modifier par catachrèse pour adapter les signes aux idées nouvelles en passant d'un sens primitif à un sens rénové (dit figuré).

Se référer au "pouvoir des mythes" est aussi une façon d'employer les multiples ressources des langages pour gérer efficacement l'interface langagière. Dans un article sur les "mythologies mathématiques", E. Nelson (in Salanski, Sinaceur (Ed.), Le labyrinthe du continu, Paris, Springer Verlag, 1992;159 sq) part du constat que "le manque de compréhension sémantique est... la raison pour laquelle tant de nos étudiants en calcul ont de si mauvais résultats aux épreuves". Ce même manque déboucherait sur des substituts mythologiques contrastés relevant de l'analyse non standard (ANS) faisant référence aux "phénomènes concrets tels les ondes et les courants aquatiques qui ne peuvent être décrits classiquement qu'avec difficulté, et qui sont mythifiés en tant que simples objets non standard". Un parallèle est proposé à cet égard entre la réussite de Niels Bohr faisant accepter la théorie quantique par les physiciens et l'échec relatif de l'intuitionnisme de Luitzen Brouwer auprès des mathématiciens. Le sens ne peut alors consister qu'en un renvoi à "un monde en déploiement encore à explorer". Ce que l'on peut aussi qualifier de sens retrouvé de la "conscience d'horizon" immanente à la linguistique idéo figurative sans exclure les adaptations et les dérivations perturbatrices et novatrices des structures grammaticales cognitives des langages.

Ch. V. Linguistique théorétique : règles et divergences

"Théorétique", forme du logos sur le logos, s'emploie au sens épistémologique pour désigner des idées, des doctrines, des orientations à la base de théories. Ainsi comprise, la théorisation est l'instrument d'une liaison symbolique entre formalisation et langage grâce à des systèmes de relations syntaxiques et sémantiques impliquant le savoir, le raisonnement et l'interprétation. Dans son expression logistique, elle se manifeste par des inférences inductives et déductives fondées sur des règles au niveau d'une pensée verbalisée "vers le haut" par abstraction et "vers le bas" par concrétisation. Cette liaison est à la fois complexe et évolutive suivant les perspectives adoptées par les penseurs. Certains privilégient la forme symbolique du raisonnement mais divergent quant à leur interprétation de la logique perçue soit comme axiomatique et principielle soit comme intuitionniste sous forme d'action symbolique. D'autres élargissent leurs perspectives théoriques, conscients des limites de l'axiomatique, permettant ainsi une exploitation de l'auto organisation grammaticale des langages par des déviations et des ouvertures du raisonnement formel fondées sur une

liberté d'appréciation et d'application à des méta formes conçues par négation telles l'infini et l'indécidabilité, ou, plus généralement, à des champs conceptuels déterminant le sens des opérations logiques.

V. 1. Logistique : axiomatique et intuitionnisme

Le passage de la pensée mathématique de la sémiologie à la construction théorique se révèle un processus difficile qu'ont essayé de mener à bien les mathématicien du XXème siècle, notamment par l'élaboration de systèmes consistants aussi précis que possible. L'axiomatique et l'intuitionnisme développent à cet égard deux conceptions qui illustrent les difficultés sinon l'impossibilité de l'opération.

V. 1. 1. L'axiomatique

Les articles de V. Hilbert traduits et commentés Par J. Largeault (Intuitionnisme et théorie de la démonstration, Paris, Vrin, 1992 : 115 sq, 146 sq) offrent une première illustration de cette situation 'lorsqu'il définit la formalisation comme une hiérarchie de règles insérée entre deux pôles : en amont et en aval. Le premier concerne les principes en tant que condition de validité du calcul (autrement dit : commodité et consistance des opérations). Le second comporte la théorie de la démonstration appliquée à des formules permettant d'ordonner des signes sans exclure l'intuition qui les situe en aval du raisonnement déductif et inductif.

Pour les principes appliqués à un domaine localisé de la connaissance, "on fait reposer celui-ci sur un nombre le plus restreint possible de principes les plus simples, les plus intuitifs, les plus aisés à concevoir ; on prend ces principes pour axiomes des propositions démontrables ou dont on a la conviction qu'elles le sont". Tel est le statut de la sémantique du langage mathématisé dont il est précisé "qu'il assure la recherche de la plus grande liberté de mouvement", qu'il consiste "simplement à avoir conscience de sa pensée" en gardant "les avantages de la croyance". "Il contraint donc à prendre position vis-à-vis de ce difficile problème de théorie de la connaissance" qu'est le problème de la consistance des axiomes. Le sujet est ainsi tenu de faire un choix théorique impliquant la raison dans tous les sens du terme.

Le but de la théorie de la démonstration est "considérable : liquider les problèmes de fondement en transformant chaque proposition mathématique en une formule qui se puisse exhiber concrètement et qui soit rigoureusement dérivable. Par là, je mets les conceptualisations et inférences mathématiques sous une forme qui les rend irréfragables et en même temps les fait se présenter comme l'image de l'ensemble de cette science".

La logique n'est pas exclue du processus mais elle ne saurait le fonder. Elle y introduit des représentations "d'objets concrets extra logiques qui, en tant qu'expériences immédiates, sont intuitivement présentes dans toute pensée... Leur caractère distinct, leur succession ou leur juxtaposition [est] donné

directement à l'intuition avec ces objets eux-mêmes, comme une réalité irréductible à quoi que ce soit d'autre et qui ne demande pas à être réduite... Telle est l'attitude philosophique fondamentale que je tiens pour indispensable".

Une précision : "En algèbre, nous considérons les expressions littérales en soi comme des entités indépendantes, et les théorèmes de l'arithmétique inclus dans l'algèbre sont formalisés au moyen de ces entités. Alors qu'en arithmétique nous avons des chiffres, les formules de l'algèbres se présentent elles-mêmes comme des objets concrets d'une attitude intuitive, tandis qu'à la place des démonstrations arithmétiques contextuelles, nous avons la dérivation d'une formule à partir d'une autre formule suivant certaines règles".

Dans un texte sur la nouvelle fondation des mathématiques (op. cit.: 117), Hilbert soutient que c'est la démonstration de "la consistance des axiomes de l'analyse" qui permet d'établir que les vérités mathématiques sont inattaquables et définitives. L'abstraction à partir "d'extensions de concepts ou de contenus sémantiques" est "insuffisante et peu sûre" Préalablement aux inférences et opérations logiques, un sens doit être créé par "certaines entités discrètes extra logiques qui, intuitivement, sont présentes en tant qu'expérience immédiate antérieure à toute pensée". Il est nécessaire que "ces entités soient parfaitement visualisées dans toutes leurs parties", que leur production, leur caractère distinct, leur succession, soient immédiatement sensibles. C'est le cas des "objets de l'arithmétique" considérés comme des signes identifiables par leurs formes indépendamment de leur contexte. "Au commencement est le signe : telle est la loi ici" que l'on peut considérer aussi comme une postulation pragmatique concernant le sens : le "signe 1" peut n'avoir aucune espèce de sens, mais "le signe 1 est un nombre" a un sens de même que les signes = ou > ou les lettres a,b,c "mises pour des chiffres".

Suit la théorie de la démonstration présentée comme le passage au "domaine de la pensée" raisonnée. La consistance d'un système se construit alors avec le signe = et son contraire $\neq$. Un système consistant exclut que l'on puisse démontrer à la fois que $a = b$ et que $a \neq b$ ou que $a \neq a$.

L'évidence, l'intuition et la convention interviennent de manière informelle et implicite au niveau langagier de l'axiomatique ; le tiers exclu garantissant la fiabilité et la rigueur s'impose dans la démonstration. A noter qu'à ce cadre mathématique peut se superposer une "métamathématique" dans laquelle "on emploie un type d'inférence à contenu sémantique, et cela dans la preuve de la consistance des axiomes que l'on ajoute au système".

Pour Largeault, "tâtonnements de l'histoire et progrès de l'imaginaire mathématique ont conduit à des propositions sur des entités abstraites qui ne sont l'image de rien de concret ni de physique... Sur le plan théorique, la formalisation de la logique et l'invention de l'axiomatique formelle (due à Hilbert lui-même) montrent que des propriétés peuvent être vraies de systèmes de choses dont la nature est indifférente (les relations se transportant d'un domaine d'entités à un autre). Ces systèmes de choses sont donc caractérisés ou déterminés par la seule forme des énoncés qui introduisent les propriétés et qu'on qualifie d'axiomes, selon une expression nouvelle".

En logologie, cette conjonction sémiologique entre désémantisation et resémantisation des formes définies par leur consistance, n'est qu'une interprétation d'un processus fondamental, celui de la mathématisation des langues naturelles, qui se trouve réduit par une grammaire déterminée à des normes provisoires. Nous verrons que les extensions sémantiques et les dérives théoriques peuvent élargir ce cadre par la pragmatique (commodité, innovation), la régulation (tiers non exclu, probabilité, modélisation), la sémiologie (indécidabilité, flou). La logique formelle de Hilbert peut être traitée comme une focalisation à la base d'une diversification philosophique où interviennent des inférences linguistiques paralogiques faisant une place aux oppositions dialectiques, à une consistance complexifiée, à des indéterminations graduées.

* * *

Dans 'Introduction à la philosophie mathématique' (1919, trad., Paris, payot, 1970), B. Russell précise, dès la préface, que cette philosophie dont relève la logique, devra traiter, "à côté de la science elle-même, certains problèmes au sujet desquels une certitude suffisante n'a pas été établie".

Ainsi, la distinction entre amont et aval ne peut se fonder uniquement sur "l'intérêt qui inspire la recherche et sur le progrès réalisé", "à l'exclusion des propositions qui font l'objet de l'examen". D'autre part, les métaphores expérimentales telles que le télescope (amont) et le microscope (aval), écartent toute référence aux langages et à leurs évolutions auxquels la pensée ne peut échapper : elles impliquent la recherche d'un "sens formel" dans les deux directions. "Les mathématiques pures classiques", réduites à la théorie des nombres, conduisent à limiter cette théorie "à un très petit nombre de prémisses et de termes non définis, d'où il était impossible de la déduire. C'est alors qu'intervient l'axiomatique de Peano que l'on peut réduire à trois idées primitives : le zéro, le nombre, la succession, lesquelles sont "compatibles avec un nombre infini d'interprétations différentes suivant les sens donnés à ces termes" (op. cit. chap. I).

"En cherchant une définition du nombre, la première chose à bien éclairer est ce que nous pouvons appeler la grammaire de notre enquête". Et cette définition est une démarche sémiologique tendant à préciser la spécificité du "nombre" en tant que symbole du groupement de certains ensembles, "ceux qui ont un nombre donné de termes". L'énumération prend ainsi place dans la dimension en extension du langage, mais elle ne peut faire abstraction de la dimension en intension. Celle-ci devient incontournable lorsque la numération est impossible, d'où l'emploi de substituts non numériques : points de suspension, "et coetera", infini (+ ou - ∞). Le dénombrement peut être enfin défini par une relation bijective (un-un) entre le "groupe d'objets à compter et les nombres naturels". Le nombre zéro est exclu de cette opération ensembliste et le nombre un devient ambigu car il peut désigner un tout ou un élément, ce qui constitue une source d'interprétations des nombres à définir en amont (op. cit. chap. II).

Cette situation concerne les ordinaux et les cardinaux dans une perspective cantorienne. La continuité attire l'attention sur la notion de "limite" en tant que "notion purement ordinale n'impliquant aucune quantité" et sur le zéro en tant que limite de quantités décroissantes. Les limites représentent ainsi une qualité de "séries

condensées et fermées" dans lesquelles "chaque terme est la limite d'une progression ou d'une régression ayant une limite à l'intérieur de la série". Cette définition contredit l'idée que l'on se fait communément de la notion de continuité (op. cit. chap. X).

Tel est le cas de l'axiome de choix de Zermelo, axiome multiplicatif hors zéro, qui est relativisé par l'exemple célèbre des bottes droites et gauches déterminables et séparables en séries, et des chaussettes qui ne le sont pas sauf intervention d'une information impliquant un principe de sélection qui peut faire défaut (op. cit. chap. XII).

Suit la définition des "fonctions propositionnelles" appliquées à des "symboles capables de fournir une expression de vérité ou de fausseté". Elles se divisent en deux classes fondamentales fondées l'une sur le réductionnisme logique, l'autre sur la sémantique linguistique ; celles qui ne sont ni vraies ni fausses du fait de leur indétermination, par exemple "x est humain" ; celles qui assignent une valeur à x par dénotation ce qui les transforme en information vraie ou fausse par référence. "Toute équation mathématique est une fonction propositionnelle. Tant que la variable n'a pas de valeur définie, l'équation est simplement une expression qui attend qu'on la détermine pour devenir une expression vraie ou fausse". La mathématisation du langage est ainsi présentée comme une désémantisation du signe linguistique, signifiant sans signifié, dans une sémiotique en extension définitoire excluant le principe de vérité. Métaphoriquement, "une fonction propositionnelle peut être considérée comme un simple croquis, une enveloppe, un vase destiné à recevoir une signification, mais non pas comme quelque chose présentant déjà une signification... Dans ce cas, les objets sont des "circonstances" de la vérité propositionnelle [qui devient] vraie dans certaines circonstances et fausse dans d'autres, à moins qu'elle ne soit toujours vraie ou toujours fausse". Autrement dit, une manière de traiter le rapport de synecdoque entre tout et partie par des termes tels que 'tout', 'chaque', 'un', 'le', 'quelque', mais aussi 'toujours', 'quelquefois', et des modalités telles que 'nécessité', 'possibilité', 'impossibilité'. Les "classes" constituent une autre manière d'exprimer le même rapport de manière hypothétique entre termes de relations "ancestrales" définissant l'antériorité et la postérité d'un point de vue symbolique par une "fonction extensionnelle dérivée" : à la primitive "la fonction $f(x)$ a la propriété p", on peut adjoindre par équivalence une fonction subséquente de la classe $f(x)$ avec la propriété p. D'où l'axiome de "réductibilité" qui permet d'obtenir des résultats à partir de suppositions : "Il y a un type (disons de fonctions a telles que, si l'on donne une fonction a quelconque, elle est formellement équivalente à quelque fonction du type en question" (op. cit. chap. XV, XVII). Les conclusions concernant les rapports entre langage commun, logique et dans les mathématique sont orthodoxes et plus restrictives que dans les développements précédents; elles se fondent sur la spécialisation, la vérité et la formalisation.

1) La logique est un langage spécialisé qui interprète le langage commun en terme, de symboles que ce langage ne peut exprimer ; de même "la grammaire et la syntaxe ordinaires sont extrêmement trompeuses".

2) Les prémisses d'un raisonnement impliquent la conclusion et non pas la vérité "réelle" de ces prémisses et de la conclusion ; dans les affirmations ne sont mentionnées ni choses ni propriétés, ce qui permet de passer du particulier au général sans perte de temps.

3) C'est ce que permettent les études "purement formelles du type relationnel $x R y$ dont les symboles expriment des "constantes logiques" dont la vérité est indépendante de l'univers : la logique et la mathématiques ne s'occupent que "des formes et seulement pour constater qu'elles sont vraies toujours ou quelquefois" (op. cit. chap. XVIII).

V. 1. 2 L'intuitionisme

L'ambiguïté, l'incertitude retrouvent une place dans la logique intuitionniste de L. Brouwer (in Largeault, op. cit. chap. I-III, XII-XIX, XXIII-XVII), traitant la grammaticalisation formelle d'un point de vue psychologique et conceptuel. Entre abstraction et référence, entre débat et tolérance, on peut comprendre le langage en tant qu'action symbolique relevant d'une logique plus étendue que la logique formelle, fondement d'une nouvelle pensée ou philosophie mathématique plus ouverte sur le monde et dans le temps.

L'absence de "conscience de légitimité" de cette conception ne met pas en cause sa validité mathématique. "C'est au philosophe ou à l'anthropologiste... d'expliquer pourquoi tels systèmes de logique symbolique plutôt que d'autres sont effectivement projetables sur la nature... C'est au psychologue d'expliquer pourquoi nous croyons à de tels systèmes ... et non point à d'autres, en particulier pourquoi nous éprouvons de l'aversion à l'égard des systèmes appelés contradictoires..."

"L'apriorité kantienne de l'espace" est abandonnée au profit du "maintien d'autant plus ferme de l'apriorité du temps. Le néo-intuitionisme considère la dissociation d'instantanés vécus en parties qualitativement distinctes, qui ne se réunissent qu'en restant séparées par le temps, comme le phénomène fondamental de l'intellect humain, phénomène qui, par abstraction de son contenu fondamental, donne le phénomène fondamental de la pensée mathématique, l'intuition de la dyade pure". Cette intuition de la dualité (à rapprocher des idéo figures) "engendre non seulement les nombres un et deux, mais aussi tous les nombres ordinaux finis, attendu que l'un des éléments de la dyade peut être pensé comme une nouvelle dyade, et que ce processus s'itère indéfiniment". De cette connexion intuitive, on passe immédiatement à une intuition inférentielle du continu linéaire, de propriétés de l'arithmétique à celles des géométries euclidienne et non-euclidiennes, ce que Descartes avait prélué avec la géométrie algébrique (op. cit. : 42-44).

"L'attitude temporelle" fondée sur la dyade ou la suite dyadique d'entités séparées se succédant dans le temps donne naissance à une "attitude causale" qui "consiste en l'acte volontaire "d'identification" de suites temporelles distinctes de phénomènes qui s'étendent sur le passé et sur l'avenir". Le "substrat commun à ces suites identifiées" est la "séquence causale". Cette opération est fondée sur des "volitions" et débouche sur le "monde de la représentation" que l'on pourrait qualifier aussi d'interprétation de conceptualisation de

rationalisation. Le problème posé est celui de l'abstraction au sens suivant : "La pleine expansion du mouvement des actions mathématiques n'est possible qu'à des niveaux de civilisation supérieurs, grâce à l'abstraction mathématique qui dépouille la dyade de son contenu concret pour ne la conserver que comme forme vide, substrat commun de toutes les dyades [formant] l'intuition originaire de la mathématique, dont l'auto déploiement introduit notamment l'infini à titre de réalité de pensée..."

Alors intervient la communication par l'intermédiaire du langage : "Or la transmission de la volonté, en particulier la transmission de la pensée qu'assure le langage, n'a ni exactitude ni sûreté. Cet état de choses subsiste intégralement lorsque la transmission de la volonté s'appuie sur la construction de système purement mathématiques. Il n'y donc pas non plus pour la mathématique pure de langage sûr, i.e. il n'y a pas de langage qui, dans la conversation, exclurait les malentendus, et qui, lorsqu'il s'agit de soulager la mémoire, protégerait contre les erreurs (i.e. contre la confusion entre des entités mathématiques distinctes). Cette remarque s'applique à l'école formaliste et à "s3 confiance téméraire dans la logique classique" en tant que "langue" élaborée pour la "réflexion mathématique sur les collections finies de choses du monde spatio-temporel objectif, conçues comme homogènes et fixes"; de ce langage empirique, on passe à des principes logiques abstraits tels les "lois d'identité, de contradiction, du tiers exclu et du syllogisme" appliquées d'une "façon purement linguistique" dans un cadre que l'on peut qualifier de référentiel.

Comment résoudre le problème du passage au champ abstrait ? "L'intuitionnisme fait prendre conscience de l'existence extralinguistique de la mathématique pure et, afin d'éprouver sur cette base la correction des mathématiques traditionnelles, recherche d'abord en quelle mesure les principes logiques qui ont joué un si grand rôle dans sa construction, sont susceptibles, également dans la mathématique de l'infini, de faire fonction de moyens de passage entre constructions de pure mathématique". La réponse n'est négative que pour la loi du tiers exclu.

Exemple : Une propriété "évanouissante" d'un nombre naturel dont il est impossible de décider soit l'existence faute de nombre la remplissant, soit l'absurdité au niveau de l'ensemble des naturels, d'où le concept de "nombre oscillant". "Si nous appelons comparables à zéro aussi bien les nombres positifs que les nombres non positifs, et incomparables à zéro les nombres réels dont il est impossible qu'ils puissent être comparés à zéro, le nombre oscillant dyadique n'est ni comparable à zéro ni incomparable à zéro, contrairement au principe du tiers exclu". (op. cit. : 258 sq). Cette affirmation concernant la comparabilité des nombres peut être interprétée comme une illustration possible de l'indécidabilité formalisée par Gödel à propos de l'arithmétique.

V.2. Méta formes mathématisées : infini et indécidabilité

Par méta formes nous entendons des objets de la formalisation construits par un élargissement du sens d'une forme essentielle de la mathématisation du langage, en l'occurrence, la théorie des nombres. Cet élargissement est réalisé négativement par rapport, d'une part, au terme "nombre" envisagé concrètement

comme fini et abstraitement comme infini, d'autre part, au fondement des mathématiques indécidable formellement en ce qui concerne leur base arithmétique. Le langage intervient dans ces deux opérations impliquant de manière incontournable ses deux perspectives interprétatives : l'intension-compréhension et l'extension-numération.

V. 2. 1. L'infini

Le vague et la complexité des définitions qu'il propose est souligné par G. Cantor (Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis (1899) trad. Paris, Gabay, 1989): Il choisit de les attribuer à la "faculté de penser" et les traite comme la transformation de l'infini mystérieux de la théologie en une complexité accessible et concevable par le langage. Cette "laïcisation" se fait d'abord par des ensembles en tant que "réunions M d'objets m de notre conception qu'on nomme "éléments de M". Ensuite intervient l'abstraction sémiologique de M : "Nous appelons "puissance" ou "cardinal" de M la notion générale que nous déduisons de M à l'aide de notre faculté de penser, en faisant abstraction de la nature des différents éléments M et de leur ordre". La puissance de M résulte de cette abstraction et s'écrit $\underline{M}$ représentant "dans notre esprit le rapport entre une totalité et des unités, entre un tout et ses parties" mais aussi, dans une perspective idéo figurative de synecdoque, le rapport entre un signe et ses sens possibles. Deux ensembles peuvent être équivalents ou équipotents en tant que totalités (notés $M \approx N$ ou $N \approx M$) si à chaque élément de l'un correspond un et un seul élément de l'autre. Cette équivalence fondée sur une représentation bijective de relations à "l'état pur" permet une définition du concept de nombre cardinal en tant que mesure de cette équivalence: $M \neq N$ implique $\underline{M} = \underline{N}$; d'où les égalités algébriques :

$\underline{M} = a$; $\underline{N} = b$; $a+b = (\underline{M} + \underline{N})$; $a+b = b+a$; $a+ (b+c) = (a+b) +c = (\underline{M} + \underline{N} + \underline{O})$ lesquelles définissent abstraitement une égalité, une transitivité et une distributivité cardinalisées (op. cit. : 343 sq)

Ces propositions principielles fondent la théorie des nombres infinis ou transfinis à partir de la théorie des nombres finis reposant sur une récurrence de nombres cardinaux appelés finis, désignés par une suite illimitée de chiffres. Cette translation aux ensembles transfinis et aux nombres cardinaux infinis se fait par une opération sémiologique utilisant l'arbitraire du signe 0 pour définir une limite cardinale du transfini. C'est ainsi que le Nu grec (ν) désignant "l'ensemble de tous les nombres cardinaux finis" est le signe concret d'un ensemble transfini car il suffit de le désigner par un cardinal correspondant pour créer une nouvelle catégorie de transfinis désignée par l'Aleph hébreux à la puissance zéro (N_0). On obtient donc une égalité de base entre infini et fini cardinalisés: $N_0 = \{\nu\}$ qui définit un continu numérique.

Ce nouvel univers de signes et de sens est constitué de relations inégalitaires de grandeurs hiérarchisées. Par exemple, "le nombre N_0 est plus grand que tout nombre fini μ "et N_0 est le plus petit nombre transfini". Dès lors, "tout ensemble transfini T a des parties dont le nombre cardinal est N_0 ce qui revient à traiter les ensembles finis comme des parties d'un ensemble transfini total. Cette relation n'est pas transposable aux ensembles transfinis : "tout ensemble T est tel qu'il a des parties T_i qui lui sont équivalentes.

Les relations $>$ et $<$ permettent de définir les "ensembles simplement ordonnés" dont la numération est problématique et dépend d'un choix axiomatique entre deux types d'ordres caractérisant la nature des ordinaux et des cardinaux. Dans les ensembles finis, les ordinaux correspondent aux cardinaux ce qui ne soulève pas de problème particulier : ils constituent la première classe numérique. En revanche, dans les ensembles transfinis, à un nombre cardinal unique (par exemple N_0 correspond une infinité de types différents d'ensembles pouvant être projetés dans les entiers naturels (par exemple, les nombres pairs, premiers, divisibles par n , etc...) et qui constituent une deuxième classe de types appelée Z (N_0 (op. cit. : 358).

Dans ces opérations, les cardinaux sont utilisés comme les marques de repères qualitatifs impliquant un ensemble indéterminé mais définissable par des caractéristiques localisées dans des étapes séquentielles et par une interprétation globale des sens possibles des messages transmis par un texte. La "puissance" d'une étape évalue son intensité fonctionnelle dans une suite supposée cohésive et cohérente.

"La deuxième classe numérique a un nombre plus petit que tous les autres " $W = \text{Lim}.v$ ". Cette limite a un sens résultant du rapport supposé (par définition) entre les ordinaux finis de la première classe numérique et les ordinaux transfinis de la deuxième classe, ce qui implique des opérations fictives.

"Si ∞ est un nombre de la deuxième classe, le nombre immédiatement supérieur de la même classe est $\infty + 1$ ". Mais, les nombres cardinaux exprimant des puissances dans l'ordre infini, on a :

$$\infty + 1 = \infty + 1 = N_0 + 1 = N_0.$$

→ "Si ∞ est un nombre quelconque de la deuxième classe et v_0 un nombre ordinal fini quelconque, on a : $v_0 + \infty = \infty$ et par suite : $\infty - v_0 = \infty$ ". De même, "si v_0 est un nombre ordinal fini quelconque: $v_0 \cdot W = W$ " (op.cit. :406).

Les définitions de la deuxième classe font intervenir d'autres propriétés du nombre-puissance qui reprennent celles des nombres finis de manière abstraite : ce sont l'ordre, le minimum, la limite. L'ordre : "Tout ensemble de nombres différents de la première et deuxième classe rangés par ordre de grandeur, est un ensemble bien ordonné". Le minimum : " Tout ensemble de nombres différents de la première et deuxième classes a un nombre plus petit". La limite : "La puissance de la deuxième classe numérique est le deuxième nombre cardinal transfini Aleph-un (N_1)"(op.cit.:411).

La théorie cantorienne des ensembles transfinis peut être interprétée à plusieurs points de vue. Concernant la théorie des ensembles, elle apparaît comme une opération fondée sur une ambiguïté créatrice et des possibles déductibles. En introduisant l'hypothèse du continu, elle ouvre de nouvelles perspectives interprétatives, compatibles avec la version standard de cette théorie mais dépourvues de sens dans celle-ci (P.J. Cohen, R. Hersh, Non-Cantorian Set Theory, Scientific American,_Décembre- 1967 ; J.W. Dauben, Georg Cantor and the Origins of Transfinite Set Theory, idem, Juin,1983).

Dans l'analyse logo logique, l'attention se porte sur le substrat langagier de la pensée cantorienne (d'inspiration théologique). Un sens est alors conféré aux interprétations appliquées aux nombres à partir de trois idéo figures qui se révèlent plus inventives dans l'imaginaire des métaformes que les déduction dans la logique symbolique.

La première se réfère à la négation dialectisée qui est à la base du raisonnement : l'opposition entre fini et infini en faisant intervenir l'idée d'une relation conceptualisée par le terme "transfini" et fondée sur des définitions de quantités infinies différentes mais comparables à des numérations finies. Par exemple : la suite des infinités de points irrationnels sur un segment de droite délimité par des points numériques rationnels.

La seconde fait intervenir la relation par synecdoque entre une totalité et ses éléments, permettant d'établir un instrument de mesure par projection bijective d'une totalité dans une autre en vue de comparer par appariement les éléments composants.

La troisième concerne une interprétation de la sémiologie mathématique par connexion et inférence relevant de la métonymie et de la métaphore. Si des nombres irrationnels tel $\sqrt{2}$ définissent une limite numérique pour un ensemble infini de points voisins, alors ces points limites peuvent aussi constituer des ensembles infinis dérivés et numérables. Des signes comme ∞ , $\infty + 1$, $\infty + 2...$ peuvent aussi être interprétés comme des nombres transfinis. Les relations entre ordinaux et cardinaux résultent d'une organisation conjointe entre deux classes de nombres.

Le transfini soulève de nombreuses questions concernant les rapports entre langages et formalisation, lesquelles seront traitées globalement en tant que manifestations d'un logo diversité irréductible (Infra VI. 1).

Une illustration est présentée dans les lignes suivantes concernant l'axiome de choix en tant que "forme" pragmatique de l'ensemblisme.

* * *

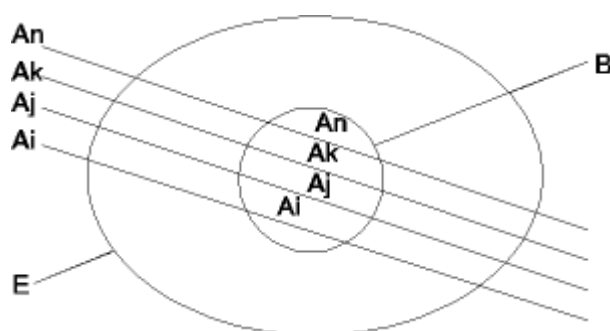
Les définitions et interprétations de l'axiome de choix essayent de donner un sens à la variabilité de la fonction axiomatique en rapport avec les conceptions formalisées et réductrices. Pour Cantor, il s'agit de déterminer qu'un élément d'un ensemble est réel et de démontrer que deux éléments de cet ensemble sont distincts, d'où la règle : il est toujours possible de choisir un élément représentatif de chaque ensemble dans un groupe d'ensembles non vides (comportant au moins un élément). Autrement dit, une règle de représentation et d'échantillonnage (terme jamais employé) qui se heurte à la définition des éléments d'un ensemble et à l'incommensurabilité des ensembles transfinis (A. Calder, Mathématiques constructives, Pour la Science, 26, 1979).

Dans le Dictionnaire des Mathématiques Modernes (1969), l'axiome de choix est défini : "Le produit d'une famille d'ensembles non vides est un ensemble non vide" (op.cit.:24). L'axiome de Zermelo est présenté comme équivalent : "Pour tout ensemble E, il existe une relation d'ordre qui fasse de E un ensemble bien ordonné". Est également cité le refus de mathématiciens alléguant un problème de définition du mot "existence", "d'où de mauvais jeux de mots" dus à une particularisation non-ensembliste.

La substitution d'un principe d'ordre au couple vide/non vide et à l'interprétant "existence" rend l'axiome plus compréhensible mais en lui ôtant sa dimension cantorienne et en effaçant le problème d'une représentation incompatible avec l'hypothèse du continu qui impliquerait le choix d'un nombre infini de termes. Mais l'axiome de choix n'a pas disparu pour autant comme le montrent les définitions suivantes "désémantisées". Axiome de choix : "Soit $X_a \in X$ une famille d'ensembles non vides contenus dans un ensemble X , les X_a étant indexés par un ensemble A d'indice a . Alors le produit $\prod X_a$ est un ensemble non vide (P. Lelong, Introduction à l'Analyse Fonctionnelle, Les Cours de Sorbonne, 1971 : 5).

Autre définition. Ensemble de choix de E : "Si $(A_i)_i$ est une partition d'un ensemble E , il existe un sous-ensemble B de E tel que chaque A_i ait un seul élément en commun avec B . B est alors appelé un ensemble de choix de E " (A. Bouvier, La Théorie des Ensembles, Paris, PUF (QSJ), 1969 : 115). Cette dernière expression neutralisée sémantiquement se substitue aux termes "ensemble non vides", "existence", "ordre".

Dans les deux définitions citées, l'idée de choix est représentée par un graphique :



Une idéo figure de synecdoque (la partie dans et pour le tout symbolise un panel représentatif) permet de définir l'ensemble B à la fois comme un sous-ensemble de E et comme une représentation I de la totalité d'un E supposé global et ordonné $(A_i)_i$. Dans ce type de formulation, l'axiome de choix peut être utilisé partout et "sans aucun scrupule"; très souvent, comme dans le cas de Bourbaki, il est remplacé par le "T de Hilbert" qui en est une des formes les plus fortes" pouvant aller jusqu'à représenter un objet dont on ne peut rien dire (Bourbaki, op. cit. : 16).

Suivant ces exemples, il est possible de théoriser de manière pragmatique, cas par cas, le rapport entre fini et infini en substituant à l'indécidable la commodité ou la convention selon Poincaré, autrement dit, en fondant la définition sur l'utilisation et la représentation sur la fiction.

V. 2.2. L'indécidabilité

L'indécidabilité démontrée par K. Gödel met formellement en question les fondements axiomatiques du calcul dans l'interprétation logiciste (La formalisation, Cahiers pour l'analyse, 10, Paris, Seuil, 1969 ; Frege and Gödel, Two Fundamental Texts in Mathematical Logic, London, Oxford Univ. Press, 1970! Nadel & al., Le théorème de Gödel, trad., Paris, Seuil, 1989, ; R.M. Smullyan, Les théorème d'incomplétude de Gödel, trad., Paris, Masson, 1993). Pour l'auteur, "le développement des mathématiques vers plus d'exactitude a conduit... à en formaliser de larges secteurs, de telle sorte que la démonstration puisse s'y effectuer uniquement au moyen de quelques règles mécaniques. Deux systèmes formels sont ainsi visés (op.cit.1969:84 sq, 1970:87 sq) : celui des Principia Mathematica de Russell et Whitehead et celui de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. On sait que ces deux systèmes mettent en oeuvre une formalisation reposant sur "quelques axiomes et règles d'inférence", alors que "la méthode axiomatique possède des limites internes qui excluent la possibilité d'axiomatiser entièrement ne serait-ce que l'arithmétique ordinaire des entiers" (op. cit. Il suffit de montrer "qu'il existe au contraire dans les deux systèmes des problèmes relativement simples concernant la théorie des entiers que l'on ne saurait trancher sur la base de tels axiomes". Cette remarque vise une classe très étendue de systèmes formels, en particulier, "ceux qui modifient les précédents par addition d'un nombre fini d'axiomes". Plus précisément, à des systèmes constitués de formules se présentant comme des "séries de signes élémentaires aux propriétés définies verbalement (points, droites, variables, constantes, parenthèses, etc...) l'auteur oppose un autre choix, celui de la "métamathématique", désignant un autre objet constitué de signes primitifs de base, à savoir : les nombres entiers naturels.

En bref, il propose l'élaboration d'un langage formel indémontrable autre que celui admis par les mathématiciens. L'analogie avec "l'antinomie du "Crétois menteur" formulée dans le "paradoxe de Richard" est citée en exemple et, comme nous le verrons, se révèle plus significative qu'il n'est généralement admis en ce qui concerne le choix d'interprétations dans le cadre d'une grammaire "richardienne" échappant à la logique de vérité. Le Crétois disant qu'il est menteur crée une situation représentée par la formule :

$$\exists x ((x,a)(\underline{x},a)(x,\underline{a})(\underline{x},\underline{a}))$$

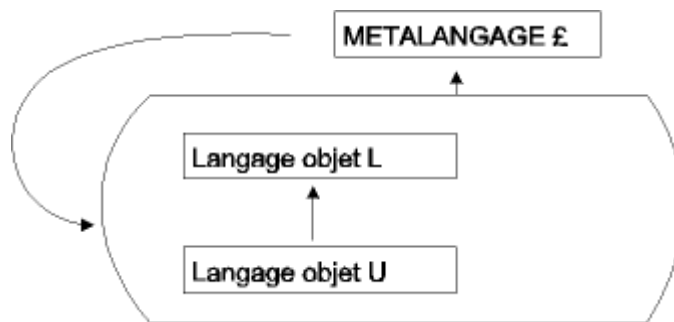
Autrement dit, le message transmis peut contredire l'affirmation énoncée.

Autre analogie subtile dans le domaine des nombres : on peut dire sans erreur racine de deux au carré égale deux ($\sqrt{2} = 2$ et $\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 4$) à condition d'ignorer la catégorie des irrationnels infinis en tant que rapport d'entiers finis.

Ce qu'établit le théorème de Gödel, c'est qu'un "énoncé universel vrai" peut ne pas être prouvable car un processus infini de vérifications ne peut pas être projeté dans une démonstration formelle finie par essence. D'une manière générale, ce qui est en cause, c'est la traduction de formules d'un langage dans un autre langage, de définitions en intension en définitions en extension et vice-versa. C'est ce que prouve l'auteur par une arithmétisation métamathématique des formules à partir de la création d'un système de signes réducteur par métonymie : les nombres de Gödel. Ce langage numérique est fondé sur des définitions dans l'ordre des

entiers. "La suite de formules qui porte le nombre de Gödel x n'est pas une démonstration (D_m) de la formule qui porte le nombre de Gödel z ". La formule arithmétique peut ainsi être précisée "pour tout x " : $(x) \text{ Dem } (x,z)$. Ce qui revient à affirmer qu'aucune démonstration ne peut être donnée de la formule qui porte le nombre de Gödel z quel que soit x (op.cit. 1989, I. 6,7).

La translation a été représentée dans un schéma aussi déconcertant que stimulant d'un langage ordinaire mathématisé réduit à une concaténation d'entiers (Petite Encyclopédie des Mathématiques, Paris, Didier, 1980 : 788) :



- Dans le domaine "objet" L et U représentent une sémantisation courante définie par une fonction référentielle autonome (dénotation).

- Le domaine métaobjet O implique la possibilité de la translation de L à U dans une autre sémantique.

- Le métalangage $£$ est une opération transcendantale permettant une arithmétisation de O .

- La gödelisation réalise la même opération pour une proposition à la fois démontrable et indémontrable, $£$ étant à la fois un langage de O et du système $\langle L, U \rangle$. Lien entre la signification et la preuve par le calcul, la grammaire gödelienne conserve quatre relations du langage objet : la transcendance, la conjonction, la quantification et la négation.

La méthode de Gödel se fonde sur une suite d'opérations dénotatives par arithmétisation de signes non numériques en vue de créer des nombres à la fois ordinaux et cardinaux dans leur utilisation (nombres de Gödel) consistant à projeter des définitions extra mathématiques dans la suite des entiers. Ainsi, par convention dans un dictionnaire trilingue, on obtient les triplets suivants.

Dénotation des constantes de relation :

NON, $\sim = 1$; OU, $\vee \equiv 2$; SI.. ALORS, $\supset \equiv 3$

Il existe :

$3 \equiv 4$; EGALE, $= \equiv 5$; ZERO, $0 \equiv 6$; Successeur immédiat de, $s \equiv 7$;

PARENTHESE '(' $\equiv 8$; PARENTHESE ')' $\equiv 9$; VIRGULE ',' $\equiv 10$.

Dénotation de trois sortes de variables avec, pour unité, les nombres premiers stabilisant un calcul uniquement décomposable en facteurs premiers :

- A chaque variable numérique (x, y, z...) on associe un nombre premier distinct supérieur à 10.
- A chaque variable propositionnelle (p, q, r...) on associe le carré d'un nombre premier supérieur à 10.
- A chaque variable de prédicat (P, Q, R...) on associe le cube d'un nombre entier supérieur à 10.

Comment déterminer si un nombre est un nombre de Gödel ?

Voici un exemple :

0	=	0
0	=	0
↑	↑	↑
6	5	6
↑ 2 ⁶ ↓	↑ 3 ⁵ ↓	↑ 5 ⁶ ↓
64 x 243 x 15625		
243000000		

1) Formule arithmétique "zéro égale zéro"

en langage objet

2) Translation en nombres relationnels.

3) Règle de projection des nombres premiers par ordre croissant à la puissance des nombres gödeliens.

4) Arithmétique des ensembles finis.

5) Métamathématique arithmétisée :
nombre de Gödel de $0 = 0$
Nouvelle structure numérique.

Comment traduire en notation gödelienne une formule représentant la succession des nombres ?

Exemple :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 (& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9 \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 2^8 & 3^4 & 5^{11} & 7^9 & 11^8 & 13^{11} & 17^5 & 19^7 & 23^{13} & 29^9
 \end{array}$$

1) Formule objet : "il existe un x tel que x est le successeur immédiat de y".

2) Signes gödeliens des constantes de relation.

3) Projection de ces signes en tant que puissance des nombres premiers et calcul de $\underline{m}$ nombre unique de Gödel dans la nouvelle grammaire arithmétique de la formule.

= $\underline{m}$

Comment revenir à la formule objet par la substitution de la somme $\underline{m}$ au nombre y afin d'interpréter la formule de départ et elle seule ? La substitution de $\underline{m}$ à y détermine un nombre bien défini qui est une fonction arithmétique des signes $\underline{m}$ et 13:

$$(\exists x)(x = s\underline{m})$$

Cette formule signifie que x a un successeur immédiat de $\underline{m}$ ce qui constitue un segment de démonstration introduisant la succession. La nouvelle formule peut être représentée comme suit :

$$(\exists x)(x = ssss... s0)$$

La lettre $\underline{s}$ apparaissant m+1 fois, il ne reste plus qu'à déterminer le nombre de Gödel de cette nouvelle définition par multiplication des chiffres de la nouvelle formule :

$$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^7 \cdot \dots \cdot p_m^9 + 10 = \underline{r}$$

Le facteur premier 13 (y) disparaît; P m+10 est une variable propositionnelle dont m+10 est le m+10ème nombre premier par ordre croissant.

Pour comparer les deux nombres de Gödel m et $\underline{r}$, le calcul doit tenir compte du fait que $\underline{m}$ contient un facteur premier élevé à la puissance 13 alors que $\underline{r}$ contient tous les facteurs premiers projetables sauf celui-ci. "Le nombre $\underline{r}$ peut donc être obtenu à partir du nombre $\underline{m}$ en remplaçant dans $\underline{m}$ le facteur premier élevé à la puissance 13 par d'autres facteurs premiers à des puissances différentes". La relation de $\underline{r}$ à $\underline{m}$ dépend dès lors

de l'introduction "d'une grande quantité de symboles supplémentaires" dans le calcul de la fonction arithmétique reliant $\underline{r}$ à $\underline{m}$ et à 13.

Comment définir l'inconsistance arithmétique d'une formule G (gödelienne) dont on peut démontrer à la fois que G et $\sim G$ sont démontrables ? "Pour qu'un système soit w-inconsistant, il faut démontrer à la fois qu'il existe au moins un nombre possédant la propriété P " $(\exists x) P(x)$ " et que chacune des formules de l'ensemble infini $\sim P_0, \sim P_1, \sim P_3$ etc..." représenté par la formule " $(x) \sim P(x)$ " peut se révéler indémontrable bien que le système ne soit pas inconsistant". L'indécidabilité qui résulte alors de l'inconsistance infinitaire de G ne s'applique pas aux axiomes permettant de déduire à la fois une formule et sa négation formelle. En revanche, une preuve métamathématique montre que les axiomes sont alors consistants et que G peut être vraie en exprimant une propriété numérique complexe mais bien déterminée car elle vaut nécessairement pour tous les entiers. Ainsi, la formule " $(x) (x + 3 = 2)$ " exprime une additivité impossible mais aussi une propriété de tous les entiers dont la nécessité intuitive se prête à une axiomatisation. En généralisant, le problème de "l'incomplétude" de l'arithmétique est exprimé méta mathématiquement comme suit : "Il existe au moins une formule de l'arithmétique pour laquelle aucune suite de formules ne constitue une démonstration", donc :

"Si l'arithmétique est consistante, elle est incomplète" :

D'où la formule : $(\exists y) \sim \text{Dem}(x, y) \supset (x) \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$

Interprétation : si quelque y n'est pas une variable dans une démonstration avec x, alors x n'est pas une variable impliquée dans une démonstration de x et d'un substitut de y en chiffre gödelien (op. cit. 1989 : I,8).

Cette approche a pour but de montrer que la validité des opérations arithmétiques ne dépend pas d'une déduction à partir d'un axiome à priori, elle résulte d'un calcul métamathématique à la base d'un raisonnement par translation et projection formelles. C'est ce qu'exprime concrètement l'interprétation donnée ultérieurement par Gödel de la machine de Turing en tant que procédure "mécaniste" (ou "algorithme" ou "procédure calculatrice" ou "procédure binaire finie"), explicitant un système formel dans lequel le raisonnement est totalement remplacé par des opérations récursives sur des formules arithmétisées. Une telle comparaison suggère un rapprochement de la métamathématique avec la mathématique empirique et elle préfigure sans les résoudre les problèmes qu'allait poser la mathématique informatique dans son utilisation concernant l'intelligence artificielle (IA). Une autre interprétation est celle de W. Quine (Philosophie de la logique, trad., paris, Aubier, 1975 : 130) qui y voit un "renforcement de la contestation intuitionniste" renvoyant au constructivisme qui ne tolère pas "les méthodes qui conduisent à affirmer l'existence d'objet de quelque espèce que ce soit, sans montrer comment trouver un tel objet".

Théoriquement, la complétude exprime "l'adéquation d'une interprétation à une théorie mathématique non précisée (T)". L'incomplétude signifie qu'une théorie représentée par des modèles complexes énoncés dans un certain langage, par exemple, l'axiomatique, "ne démontre pas tout ce que l'on peut légitimement interpréter comme vrai".

Un théorème explicite cette relation : "Si T est consistante, il y a un énoncé universel jugé vrai mais non démontrable dans T". Une autre formulation de la complétude peut conduire à une théorie de l'indécidabilité : "La consistance de T sans autre hypothèse n'interdit pas de considérer une variante comme étant ni démontrable ni réfutable". C'est le cas de l'axiome de choix dans l'approche constituée par une méta mathématisation à un certain degré de transcendance interprétative des signes. il peut être ajouté à la théorie des ensembles sans créer de contradiction: Il en est de même pour l'hypothèse du continu fondée sur des fonctions de récursivité logiquement neutres" (op. cit. 1970 : 83 sq ; W. Quine, Theories and Things, Harvard College, 1981: 154).

Incomplétude, indécidabilité avec pour contrepartie ouverture, questionnement : la théorie de Gödel est l'invention d'un langage qui, comme tous les langages, est une auto organisation de signes, admettant complémentarité ou substitution, n'en finissant pas d'évoluer par création de systèmes clos ou ouverts, fut-ce sur le fondement d'une récurrence de base continue constituant un défi pour des approches nécessairement limitées comme le serait toute abstraction figurative. Les jeux de langage ne sont pas absents d'un tel processus cognitif. Ainsi en est-il du paradoxe richardien interprété de manière à rationaliser un substrat, langagier complexe en fondant le raisonnement sur un cas jugé à priori contradictoire par référence implicite au principe du tiers exclu ; d'autres relations cognitives sont cependant impliquées par cette dysfonction entre une assertion syntaxique et une signification sémantique, plaisanterie ou erreur pouvant se traduire par une incongruité (langage courant en contexte), une ironie ou un paradoxe (rhétorique), une fallace (logique), une indécidabilité (métamathématique). Cette extension des sens possibles du paradoxe richardien met sui- la voie des conclusions que l'on peut actuellement formuler sur la "gödelite" et son succès notamment pour sa critique constructive du réductionnisme. Une logique propositionnelle ne peut qu'inclure une réflexion sur elle-même dans ses propositions concernant ses limites définitoires en extension (nombres) et en intension (sens). Cela peut justifier l'interprétation suivant laquelle "le théorème de Gödel est une réfutation d'un modèle mécanique de la science, de la pensée, du monde... basée sur l'idée que la recherche en mathématique ou ailleurs est essentiellement celle du prochain axiome dans des théorie par nature incomplètes". Cette ouverture de la grammaticalité cognitive reste cependant à confirmer notamment en ce qui concerne de "nouveaux axiomes d'infini". En outre et concrètement, comment un chercheur peut-il choisir entre A et non-A également consistants, et dont le choix ne peut être éclairé par un principe métamathématique inaccessible car en contradiction avec l'incomplétude. Ce qui est impossible en termes formels devient possible en termes empiriques par expérimentation. L'espoir change alors de sens et de modèle : "il y a pour ainsi dire saut dans l'inconnu, pari à chaque nouvel axiome". En fait, il y a passage dans l'axiomatique probabiliste, du transfini à la loi des grands nombres, de la preuve à la modélisation. "Dans un monde causal [où intervient l'informatique], les principes logiques ne touchent plus à la vérité mais à l'action" (op. cit. 1989 : 164 sq).

V.3. Les champs conceptuels de la métalogue

Les règles d'inférence formelle peuvent se révéler théoriquement contraignantes dans une perspective spatio-temporelle du développement des connaissances. Elles peuvent également se révéler incohérentes dans certaines théorisations en rapport avec le développement de secteurs de la connaissance que les mathématiques "pures" ne peuvent ignorer. Les textes qui suivent exposent, d'une part, les problèmes posés par le traitement des à priori logiques concernant notamment la négation et la contradiction posés dans une perspective de relativisation théorique et d'indécidabilité formelle; d'autre part, la rationalisation de méta formes virtuelles au-delà de la formalisation classique.

V. 3.1. La contradiction relativisée

On peut situer dans la continuité des idéo figures par négation et dialectique (Supra) le plaidoyer de R. Poincaré pour la "liberté de la contradiction" à l'encontre de ceux (notamment Hilbert, Couturat) qui font prévaloir le principe d'induction (Science et méthode (1909) Paris, Flammarion, 1919 : chap. 5). Selon lui, "exister" en mathématique signifie "être exempt de contradiction" alors que pour Couturat "l'existence logique" signifie l'appartenance à une classe non vide. Il ne saurait y avoir aucune contradiction entre ces deux définitions, l'une étant naturaliste et libre, l'autre ensembliste présupposant qu'un élément permet d'établir une existence dans une classe qui peut aussi exister en étant vide ou ne pas exister du tout. Dans tous les cas, le principe de la liberté de la contradiction "impose la preuve de cette contradiction à ceux qui en défendent l'idée".

Au contraire, la dialectique et l'herméneutique sont les instruments verbaux d'une recherche conduisant à des conclusions incertaines ou possibles fondées sur deux sens de la négation.

- 1) La "négation radicale" intervient en mathématique dans de nombreuses définitions à l'opposé d'une affirmation, ainsi le faux s'oppose au vrai sans autre alternative en vertu de prémisses telles que :

non A, - A ; $\sim A$; $A \vee \text{non } A$;

ou encore : les nombres inférieurs à zéro "symbole neutre axiomatique" dans cette relation, etc...

- 2) La "négation relative" définit un processus permettant de passer à la dubitation, au "flou logique", au tiers non exclu :

$(\text{non}(\text{non } A)) \rightarrow A \vee x \neq A$

L'évaluation d'une telle possibilité définit mathématiquement une autre classe de certitude en distinguant des degrés intermédiaires de vérité permettant une évaluation d'expressions verbales vagues constituant des modificateurs de renforcement ou d'affaiblissement de prédicats de base : "Il est peu probable que...", "Il n'est pas impossible que.." "Il pourrait se révéler vrai que...", "L'erreur ne peut être exclue de..." etc...

Dans cette approche, le principe d'induction est regardé "non comme une définition mais comme un jugement synthétique". Ainsi, un accord conventionnel de départ et un jugement synthétique à posteriori ne sont pas des opinions contradictoires dès lors qu'on peut les situer dans un langage en cours d'élaboration au niveau tant de la pragmatique que de l'interprétation ou de la temporalité. Le fondement du raisonnement par récurrence peut alors être interprété sous de multiples formes. Retenons les définitions de l'auteur dans La Science et l'Hypothèse (Paris, Flammarion, 1906; 1943: 22-24, 56-57) : 110e pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre [par syllogisme hypothétique] e` se donne: ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité dy raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un a~orne indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage. On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction". Il s'agit d'une "affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible" (par exemple ce qui est vrai de 1 est vrai de 2, ainsi de suite pour un nombre très grand mais limité). Le rapport entre les langages implique est présenté :comme suit à propos de l'interprétation des différentes géométries : "Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaire, ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même" sous réserve d'éventuelles interprétations reprises dans d'autres dictionnaires.

* * *

Dans ce cadre de pensée, l'oeuvre de L. Wittgenstein occupe une place privilégiée tant du point de vue historique qu'analytique. Dans le chapitre de la Grammaire philosophique (op. cit. Ile partie : 295 sq) consacré aux fondements des mathématiques, le fonctionnement de la triade signe-règle-grammaire est défini en localisant le calcul dans l'ordre sémiologique à l'exclusion des composants sémantiques (et contextuels. Les mathématiques ne concernent que l'usage de symboles que permettent les processus mentaux d'une manière neutre, hors contexte, tautologique appliqués aux nombres. Ce calcul n'est qu'une "considération des formes logiques des structures [concevables] et en soi, il ne peut rien apporter de nouveau". En bref, il s'agirait d'un langage formel degré zéro de signification, éliminant l'intension-compréhension des langages dans les raisonnements qui l'utilisent mais qui renvoient uniquement à la forme. Comment interpréter une telle proposition ?

Tout d'abord au niveau des signes que sont les chiffres et leurs relations, celles-ci étant définies par les règles d'un jeu déterminé. Ainsi, "on peut expliquer la signification du mot "arithmétique" par la relation de l'arithmétique avec un jeu arithmétique comme par la relation du problème des échecs au jeu d'échecs", à l'exclusion cependant des polarités vrai-faux et gain-perte qui relèvent d'autres règles dans d'autres jeux stratégiques visant une projection finalisée.

La vérifiabilité (ou la signification) est ainsi renvoyée à l'emploi de signes dans des contextes différents définis par des jeux déterminés ou à déterminer. Le mot "nombre" cardinal ou entier est substituable à l'expression "1,2,3 et ainsi de suite à l'infini" si on adopte la règle du jeu infini pour définition. Mais, le mot

"nombre" ouvre d'autres possibilités interprétatives moins précises (nombres premiers ou irrationnels par exemple) et qui présupposent que le concept "nombre" désigne de telles constructions et peut donc être employé "dans des cas dont aujourd'hui nous n'avons pas encore idée. Tout est affaire de règle générale à appliquer au cas où elle est valable".

Dans cette conception, "la démonstration de la contradiction des axiomes... ne serait pas un si grand malheur... Rien de plus facile que de l'écarter". Il est possible de dire : "les règles peuvent entrer en contradiction quand l'usage du mot "règle" obéit à des règles différentes si le mot "règle" 'prend une autre signification". Dans une telle hypothèse, il ne saurait y avoir de métamathématique ou de méta calcul. Le mot "règle" crée ainsi une focalisation langagière que l'on peut interpréter à la lumière de jeux de langage de type idéo figuratif (Supra) consistant à traiter la contradiction comme un paradoxe qui incite au doute, au questionnement et à la recherche de nouvelles solutions au niveau des grammaires fixant les conditions d'emploi des signes. Exemple : introduire en arithmétique l'égalité $2 \times 2 = 5$ signifierait que "le signe d'égalité aurait changé de signification et obéirait à d'autres règles", autrement dit, à un autre code. Ce processus de grammaticalisation est concrétisé par des jeux qui impliquent autant les langages ordinaires les plus simples que "les langages techniques les plus élaborés utilisant des schèmes et des diagrammes, des signes de géométrie descriptive, les formules des substances chimiques, etc..." Comme il est précisé dans Le Cahier Brun (trad. Paris, Gallimard, 1965 : 148), "ces jeux de langage ne représentent pas... des fragments incomplets d'un langage donné, mais chacun d'eux nous paraît être un langage complet, un moyen pour des hommes de communiquer entre eux... Remarque : nous nous représentons le langage de l'adulte sous la forme d'une vaste nébuleuse, qui serait sa langue maternelle, autour de laquelle graviraient les "jeux de langage", plus ou moins clairement délimités, du domaine des techniques".

Le temps est également pris en considération : la "grammaire du futur" peut révéler certaines anomalies de la "logique grammaticale" des expressions temporelles, mais cela n'implique pas leur exclusion. De la conjecture on passe au jeu des raisons de parier, de la projection au jeu des possibilités, des hypothèses au jeu de la recherche dans un domaine déterminé, des effets au jeu des causalités.

* * *

Une version théorique de la contradiction relativisée illustre l'éventail des possibilités ouvertes par cette liberté dans la formalisation. Il s'agit de la systématique pour laquelle H.M. Blalock (Theory Construction. From Verbal to Mathematical Formulations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969 : '18) propose deux règles en vue de réaliser une conjonction temporelle des composants par feedback."

1) Sélectionner comme axiomes les propositions qui impliquent des variables considérées comme directement liées causalement ; les axiomes doivent dès lors être des énoncés qui impliquent de tels liens directs entre les variables.

2) Formuler les théorèmes en termes de covariations et de séquences temporelles pour les rendre testables à conditions que des mesures adéquates de toutes les variables puissent être obtenues". En tout état

de cause, il peut y avoir plusieurs processus de feedback entre les variables, ce qui rend l'interprétation des formules mathématiques ambiguë et modifiable. Notons que cette présentation est fondée sur une modélisation impliquant des variables mesurables non sans risque, des liaisons causales et des covariations temporelles de nature probabiliste; le tout pour aboutir à des résultats incertains, ce qui est souvent le cas dans les sciences humaines qui exigent de ce fait un traitement logique spécial dans une construction modélisatrice où les langages jouent un rôle essentiel (Infra VII, 1).

V.3. 2. La logique floue

La formalisation du "flou" qualitatif est présentée par Zadeh dans sa théorie des Fuzzy Sets fondée sur une logique floue (Information and Control, 8, 1965 : 338 sq). Il s'agit de traiter "une classe d'objets dont l'appartenance pondérée présente une gradation continue. Chaque classe est définie par une caractéristique langagière ayant pour fonction d'assigner à chaque objet un grade d'appartenance compris entre zéro et un". Ces ensembles constituent donc une méthode de translation de définitions en intension en relations en extension dans un cadre conceptuel impliquant l'inclusion, l'union, l'intersection, le complément, la connexité, etc... "En clair, la 'classe des nombres réels qui sont beaucoup plus grands que 1' ou 'la classe des belles femmes', ou 'la classe des hommes grands' ne constituent pas des classes ou ensembles au sens ordinaire de ces termes en mathématique. Cependant, il n'en demeure pas moins que des classes définies avec cette imprécision jouent un rôle important dans la pensée humaine, notamment en matière de structures de reconnaissance, de communication de l'information et d'abstraction.

Définition : "Un fuzzy set (classe) de A dans X est caractérisé par une fonction $f_A(x)$ d'appartenance (caractéristique) qui associe à chaque point de X un nombre réel dans l'intervalle 0-1... Ainsi, plus la valeur de $f_A(x)$ est proche de l'unité plus le grade d'appartenance de x à A est élevé".

Exemple : Soit x une ligne réelle R et A un ensemble de nombres beaucoup plus grands que 1. Il est possible d'évaluer A de manière précise bien que subjective en précisant $f_A(x)$ en tant que fonction sur R.

Cela pourrait donner: " $f_A(0) = 0$;

$f_A(1) = 0$; $f_A(5) = 0,01$; $f_A(10) = 0,2$; $f_A(100) = 0,95$; $f_A(500) = 1$.

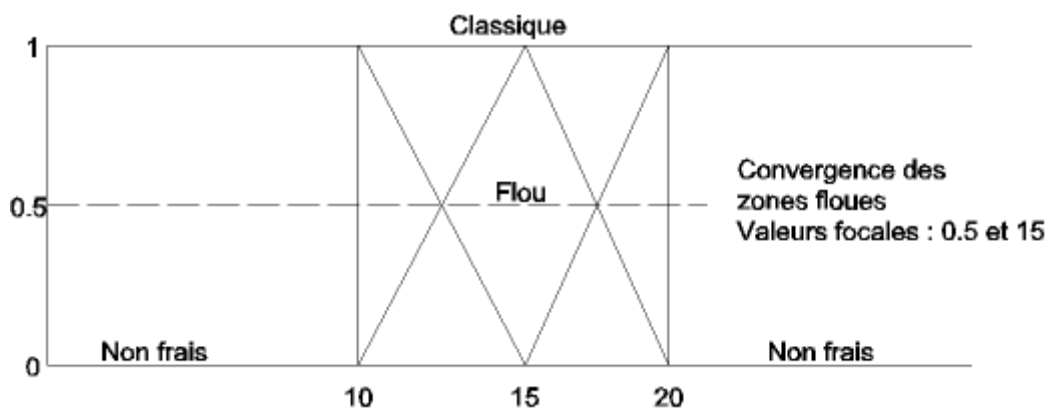
Malgré la ressemblance de cette procédure avec une fonction probabiliste quand x est calculable, "en fait la notion de fuzzy set est complètement non statistique par nature" car moins exigeante quant à la rigueur du résultat. La référence à la théorie des ensembles pour désigner des éléments ou des valeurs vagues ou ambigus, est une commodité de langage permettant de donner un sens aux opérations entre types constitués en classes et sous-classes. Il en est de même pour l'appartenance qui se rapporte à un ordre ou à un niveau numérique pour décrire une qualité approximativement. Un rapprochement avec les probabilités peut être

envisagé si le "flou" est un phénomène global sans particularités objectives, telle la moyenne d'une série de mesures.

La logique floue est en opposition avec la logique classique et la loi du tiers exclu en se fondant sur une relation intension/extension fondée sur l'interprétation à double valeur cardinale et ordinale. Pour la pensée courante, vérité et mensonge sont en contradiction et s'excluent ; dans la logique floue, l'affirmation est considérée comme à moitié vraie notée 0,50 ce qui est une manière de traiter le cas du Crétois qui affirme être menteur (B. Kosko; S. Isaka, La logique floue, Pour la Science, 191, 1993 : 62-68). De telles évaluations sont fondées sur des règles permettant de cerner une zone floue dont la taille reflète l'imprécision, en même temps qu'elles établissent les limites de cette imprécision comme de la formalisation possible du langage dans un domaine de connaissance approchée. Le "flou" est alors une approximation optimale d'une relation de cause à effet, de "Si ; alors", d'intrant à extrant.

Un théorème de convergence uniforme énonce que "les systèmes flous approchent n'importe quelle fonction mathématique continue", dès lors, "un nombre suffisant de petites zones floues recouvre le tracé de n'importe quelle fonction reliant entrées et sorties. Le théorème démontre aussi qu'il est possible de choisir l'erreur tolérable de l'approximation, et qu'il existe alors un nombre fini de règles floues satisfaisant cette condition".

Dans la logique classique les objets appartiennent ou non à un ensemble, dans la logique floue les objets appartiennent à une zone dans une certaine mesure dont les limites ont pour définition la valeur neutralisée 0,5. Par exemple, une définition de l'air frais entre 10° et 20° avec pour valeur focale 15° est schématisée comme suit en "classique" et en "flou" :



D'une manière plus générale, un algorithme aboutit à un résultat évaluatif de possibilités à partir de ce que l'on peut considérer comme des repères verbaux permettant de construire une topique à partir de "l'anecdote représentative" d'une situation. La base linguistique est alors constituée par x (nom de la

variable), T x (termes de base), U (univers du discours), G (grammaire), S (sémantique). La topique linguistique est alors traduisible en une quantification floue de la distribution des possibilités F :

$$X \text{ est } A \rightarrow Fx = A.$$

Cette définition suggère une comparaison intéressante entre la logique floue et une logique actantielle fondée sur des topoï (Infra) dans laquelle le "flou" devient une indétermination limitée compte tenu de certaines relations définissables à partir de comportements humains et de normes. Par exemple : continuité, changement; répétition, innovation; linéarité, divergence, etc...Les zones floues sont alors nombreuses et dispersées mais systématisables conceptuellement et formellement à partir de topiques constituées de termes-clés. C'est ce que permet de représenter la relation "Si ... alors" complétée comme suit :

SI -----> **ALORS**-----> **MAIS**

/ \

Données :	Justifications :	←→	Inférences :	Négation relative
Contexte	(Dès lors que...)		Pari	:
Repères			Choix	Crédibilité
Expériences	↑		Hypothèse	Projection
Informations	Fondement :		Modèle	(Il se pourrait que...
	(Compte tenu de...)			A moins que...)

V. 3. 3. Le niveau "méta-" des langages formels

Les rapports de la logique et des mathématiques relèvent à la fois du voisinage et de la différence. Les mathématiques comportant de nombreuses limites et des preuves peu convaincantes, il revient à la logique de définir les étapes impliquées par ces coupures. "La logique est la servante des mathématiques".

Cela est rendu possible par la communauté du "front continu d'impartialité" qu'elles présentent face aux sciences de la nature, ce qui explique qu'on les traite à part des autres sciences.

R. Carnap tente de définir et de préciser le métalangage de la gestion des contradictions à partir du structuralisme linguistique en combinant sémantique et syntaxe. Dans les Foundations of Logic and Mathematics, (Univ_of Chicago Press, 1970), l'exposé débute par une définition des trois composants structurels des langues. La pragmatique "est une discipline empirique traitant de la particularité du comportement humain en utilisant les résultats des différentes branches de la science (essentiellement la science sociale mais aussi la physique, la biologie et la psychologie). La sémantique est "un système de signes pouvant être des mots ou des symboles particuliers tels que "0", "+", etc..." Les signes descriptifs sont ceux qui désignent des choses ou des propriétés des choses, leur fonction est la dénotation. Les signes logiques "servent principalement à connecter des signes descriptifs dans la construction des phrases sans désigner par eux-mêmes des choses, des propriétés des choses". Ils correspondent par exemple à des mots tels que "est", "sont", "non", "et", "ou", "si", "quelque", "chaque", "tous"...

La syntaxe logique se situe à un autre niveau d'abstraction : son instrument est le métalangage formel en tant qu'il a pour objet les expressions du langage commun et, surtout, des sortes de signes et de l'ordre dans lequel ils apparaissent dans les expressions. Ainsi se crée une identité entre la syntaxe logique (inspirée de la grammaire dont elle exprime "la théorie des groupements de mots" d'après Saussure) et le métalangage qui fournit une base pour la logique formelle ou système formel dont la finalité opérationnelle est la distinction du vrai et du faux. Alors se réalise la jonction entre la logique et le calcul, entre la méthode axiomatique et la déduction logique.

Cette liaison est constante. La logique et les règles de déduction peuvent être choisies librement par convention en tant que bases pour la construction d'un système linguistique complété par un système d'interprétation. Ou bien le système de logique ne dépend pas d'un choix mais de sa vérité ou de sa fausseté si une interprétation des signes logiques est fixée au préalable, ce qui n'exclut pas les conventions. Cette approche a le mérite d'une investigation libre et inclusive des multiples formes de systèmes logiques inventées ces dernières décennies et qu'illustrent les systèmes d'axiomes grammaticalisés et développés par des règles primitives additionnelles toujours interprétables. De la logique formelle on passe ainsi à la logique intuitionniste, à la logique des modalités et des probabilités, à la logique des systèmes et modèles aux multiples valeurs.

* * *

Lorsque dans L'axiomatic (Paris, PUF (QJ), 1967 : 66), R. Blanché évoque la métalogue et la métamathématique, il précise qu'il s'agit d'une prise de conscience de la nature de la formalisation. "Au calcul formel, langue objective vient ainsi se superposer une métalogue, qui comprend notamment les règles de syntaxe du calcul formel, et les règles sémantiques pour son interprétation concrète". Métalogue créatrice d'objet pour une nouvelle métalogue : "Et l'on peut ainsi, du moins en théorie, continuer indéfiniment ces étagements, le mot "indéfiniment" marquant l'impossibilité de tracer une limite à la régression formalisatrice, et d'éliminer, au point de départ de l'élaboration axiomatique, une trace d'intuition".

J.B. Grize comparant Logique et langage (Ophrys, 1990) définit comme suit le raisonnement formel.

"1) Il se déroule dans un domaine fermé, certes élaboré à partir des faits (les principes) mais sans plus aucun recours au réel.

2) Les éléments du domaine sont préalablement organisés entre eux (la classification constitue un cas particulier).

3) Les prémisses sont déclarées comme telles et n'ont pas à être établies.

4) Le raisonnement emprunte son dynamisme à une combinatoire, ce qui le rend susceptible d'être remplacé plus tard par un calcul.

5) Enfin la seule règle de déduction est le modus ponens". Cette définition en implique une autre "tout raisonnement formel [hors contexte] a son point de départ dans des opérations de pensée qui le précèdent et qui relèvent de raisonnements, de ce que la logique naturelle cherche à "savoir" (op.cit chap.8).

La "structure d'ensemble" de la logique naturelle consiste à poser "l'existence de quelques catégories d'objets et d'opérations, puis à montrer comment les composants d'un énoncé y appartiennent et par quelles opérations on passe des uns aux autres". Un cadre théorique est construit dont les composants sont organisés en données objectives et en facteurs subjectifs. Les premières concernent les "notions primitives" en liaison avec les classes objets" et les "couples prédictifs". Les seconds hiérarchisent ensuite des "contenus de jugement" (constats), des "énoncés"(critiques), des "configurations" (rectifications). L'interprétation de ces relations s'inspire en partie de l'idéographie de Frege.

Dans cette structure, "la langue fonctionne comme un dialogue en situation, et ceci en opposition avec le langage logicomathématique". Il s'agit "d'opérations de schématisation" qui sont ainsi "axiomatisées" dans la logique naturelle, ce qui problématise "l'incompatibilité" supposée "entre les deux logiques". Dès lors que toute inférence peut être transformée en déduction, "il n'y a pas véritablement incompatibilité... La pensée naturelle englobe en quelque sorte la pensée formelle, elle l'englobe et lui sert de fondement. La logique naturelle est à la fois plus large et plus lâche que la logique mathématique. Elle est plus large dans la mesure où elle se sert d'opérateurs qui lui sont propres - et le fait que la métalogue fait partie de la langue naturelle est décisif elle est plus lâche parce qu'elle fait usage de notions et s'autorise des non-dits".

D'après l'auteur, il aurait dû intituler son livre "Les deux faces de la logique" ; ces deux faces séparées et reliées sont deux perspectives de la fonction épistémique du langage qui ont été schématisées et développées de manière différente en grammaire cognitive dans une approche logologique ; deux précisions à ce sujet. La première concerne la place de la rhétorique dans les processus de connaissance. Aristote est souvent cité, il s'agit "d'Aristote le savant", mais "il est bien vrai que ce ne sont jamais que quelques lambeaux de sa rhétorique dont il a été question". DuMarsais est mentionné en rapport avec un jugement rapide concernant l'insuffisance de la typologie des figures. Ce sont ces figures créatrices de sens (indépendamment de l'art d'argumenter ou de persuader) que nous avons cru devoir placer au centre d'une linguistique idéo figurative venant compléter la linguistique structurelle dans une grammaire cognitive englobante d'une dynamique d'auto organisation des langages naturels et formels.

La seconde précision se rapporte à une focalisation des concepts "structure d'ensemble", "représentation et schématisation", en tant qu'interprétations topiques de la formalisation que nous valorisons à deux points de vue : en ce qui concerne la multiplication théorique des formes axiomatisées "en-contextes" définies en extension, et en ce qui concerne la construction des modèles et des schémas (principalement séquentiels) d'une formalisation axiomatisable bien que confrontée à l'incertitude, à la conjecture ou à l'indétermination.

Ch. VI Linguistique par projections formelles : l'objectivation par le calcul

Le terme "projection" a des sens multiples tant dans le langage commun que dans les mathématiques. La linguistique fait essentiellement référence au sens commun : situer des pensées dans le monde extérieur et les objectiver comme telles. Plus précisément, il s'agit de considérer un sujet qui établit un rapport entre sa pensée (intuition, idée, hypothèse...) et un phénomène physique perçu comme une réalité inconnue qu'il prétend pouvoir transformer en connaissance potentielle ou possible. Cet aspect risqué de l'opération est mis en évidence par l'emploi d'idéo figures : paradoxes, inférences hasardeuses, emploi de métaphores telles que "quanta", "chaos", "catastrophes", dont la présentation formelle par calculs et graphes constitue l'objet des études suivantes dans une perspective logologique. Le paradoxe de la transcendance revient sur les difficiles liaisons théoriques pouvant être établies entre le fini et l'infini en vue de les constituer en négations dialectisées. La théorie des probabilités apparaît comme plus convaincante dans ses calculs permettant d'évaluer les incertitudes et les "raisons de croire". L'investigation de la complexité présente un intérêt épistémologique certain en ce qui concerne l'application de systèmes formels à l'étude de données autrement incontrôlables par les moyens classiques, cela concerne la physique, mais aussi les sciences sociales dont il sera question dans le chapitre suivant.

VI.1. Le paradoxe de la transcendance : formalisation et interprétation

Entrons dans le vif du sujet avec J.M. Salanskis (L'herméneutique formelle, L'infini. Le continu. L'espace. Paris, Ed. CNRS, 1991 : Chap. IV). "Le rapport des mathématiques avec ce qu'on appelle parfois leur objet est en fait rapport à des questions, déterminant la continuité... d'une élaboration herméneutique. La mathématique apparaît ainsi comme une pensée qui ne cesse jamais d'ouvrir une perspective admettant, c'est ce qui lui est propre, la chose formelle comme médium de sa mise en acte".

Plus précisément, "voir les mathématiques comme herméneutique, c'est d'abord les considérer dans leur rapport à une instance de la question, qui est toujours autre chose que le sujet de recherche susceptible d'être explicité dans la langue commune d'un moment et d'un lieu : une instance méthodologiquement transcendante..." Interviennent dans cette opération : la "compréhension de la responsabilité du mathématicien; la voie tracée à partir de cette responsabilité ; le registre du sens concernant principalement les grands noms d'énigme, tels que nombre, infini, continu, espace..." avec référence au platonisme pour sa conception d'un "réel extra-sensible". En situation herméneutique, le sujet est engagé dans un parcours symbolique entre ce qui est au-delà de sa capacité de représentation et ce qui lui apparaît comme prévisible, "ouvert sous un certain angle". Cette ouverture appelle un passage d'une intuition à un langage ou à une parole, ou d'un texte 1 à un texte 2.

Ce qui distingue l'herméneutique formelle des herméneutiques littéraires, c'est qu'elle est constituée par une "dérive non réflexive" dans le rapport plutôt que dans l'élément lexical ; le passage est toujours passage d'une syntaxe, d'une cohérence, d'un système à un autre... [guidé] par l'opacité du calcul vers l'intersubjectivité de la règle!, et vers les textes, déductions, perspectives novatrices par le questionnement. Une liberté maximum dans l'interprétation d'un texte ou d'une donnée, est la transcendance qui la libère du texte et de son environnement, l'obligeant à innover au-delà. Peut-être conviendrait-il d'ajouter une autre propriété des langages qui se révélera importante par la suite, il s'agit de l'arbitraire du signe qui vient s'ajouter au sens des "noms d'énigme" que nous abordons maintenant.

L'infini est interprété par l'auteur en termes d' "ensemble", de "idéal", de "futur" et de "transcendance" : "quatre déterminations solidaires". Par l' "ensemble", l'infini se donne "l'objectivité mathématique". Comme "futur" et comme "idéal", il est lié aux projections langagières imaginaires, soit irréalisables, soit réalisables dans un futur sens idéal. La "transcendance" définit l'infini "par contraste avec le fini et en rapport avec son idéalité". L'intuition peut trouver une expression dans une modalité formaliste de cette complexité, mais "il s'agit en l'occurrence d'une intuition qui ne voit pas".

La conception ensembliste de l'infini s'oppose d'abord au thème de l'effectivement calculable, celui d'un calcul réalisable "dans un certain horizon temporel des opérations"; cela renvoie à une conception

"constructiviste", "intuitionniste" au sens de Brouwer. Cette indépendance vis-à-vis de la calculabilité arithmétique place d'emblée le problème de l'infini sur le plan du langage et du signe par négation et fiction.

Le fini se définit par un support concret et des règles formulées dans un langage précis et limité. La projectivité dans le futur engendre par négation relative, paradoxe ou extrapolation médiatisés l'idée d'une ouverture vers l'infini par le fini : le transfini avec l'idée de transnumérique à partir de celle de numération, celle d'incommensurable à partir de celle de mesure, ou encore celle d'indémontrable à partir de la démonstration. En conclusion, l'infini est d'abord un ensemble : "Ce qui tient ensemble par l'arbitraire d'une perspective". On pense alors à un rapport entre une vision en extension d'objets rendue possible par une conception en extension. En pensée, il s'agit d'une idéo figure de synecdoque par laquelle l'infini se manifeste comme une propriété paradoxale conduisant à nier "le rapport que le bon sens voit entre le tout et la partie". La pensée, le moi, la connexion, l'inférence interviennent à ce niveau définitoire inspiré de Kant et de Dedekind, où l'infini traduit la relation dans une temporalité faisant le lien entre un percept réel et un concept idéal, "cela suggère que l'infini ensembliste est un contenu de futurs purs à qui on donne le statut de passés purs".

Cependant, l'infini et le fini sont hétérogènes. Le premier est engagé dans la transcendance, une catégorie de l'impensable convertie en "indécidabilité" par Gödel et en transfini par Cantor, de même nature que l'éternité reposant sur la théologie négative, c'est-à-dire, sur un vide référentiel comblé une formalisation des règles du langage et un contrôle de l'arbitraire des signes. C'est le cas de la cardinalisation et de l'hypothèse du continu en tant que "problèmes de contrôle de la hiérarchie induite par ce pouvoir d'auto transcendance de la transcendance (peut-on assigner la place du continu dans la hiérarchie de l'infini que la théorie permet de postuler ?)". Le problème est de rendre acceptable que l'on puisse changer, par interprétation, de monde ou d'univers sans changer de langage fut-il formel. L'algèbre, l'ensemblisme, en tant que constructions de signes de signes, sont des instruments irremplaçables dans ce genre d'opération familière à la capacité symbolique humaine. D'après Salanskis, ces constructions peuvent être réduites à deux pôles dans la théorie des ensembles : un infini transcendant définissant le statut d'un fini formel, et une approche effective d'un concret fini impliquant un infini inachevé. Une circularité définitoire et une dialectisation des opposés qui laisse en principe aux mathématiciens le choix entre une analyse formelle non standard par élargissement et enrichissement d'un langage théorique, et une analyse standard réductrice, élaborée pour combler "la cassure historique du calcul infinitésimal".

Reste à préciser la forme de l'analyse non standard (ANS) : référence est faite à E:_Nelson qui la présente comme suit par rapport à l'axiomatique ZermeloFraenkel-Cantor (ZFC) :

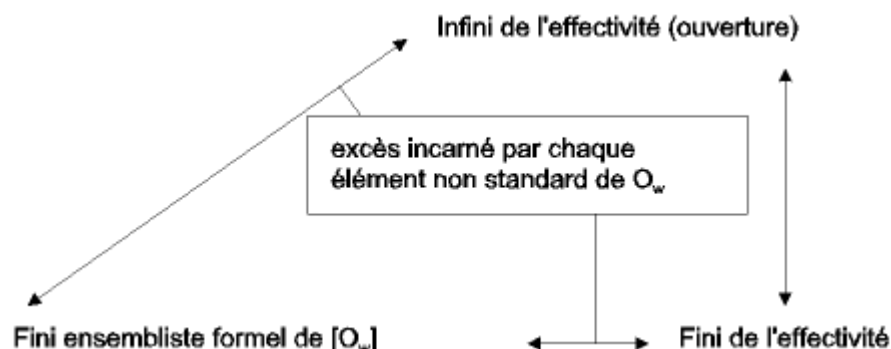
- Tout objet défini par une formule ZFC est standard, d'où l'introduction du prédicat 'st' pour désigner les formules classiques.
- Il existe un ensemble standard fini qui contient tous les objets standard de l'univers; un ensemble infini d'objets concrets reste toujours soumis à des limites matérielles.

- Tout ensemble infini admet un élément non standard (x_{Nst}) : ce rapport entre le non standard et les deux formes d'infini est fondé sur une propriété commune de l'infinité qui est "la profusion formellement infinie, échappant à la logique du fini".

L'herméneutique désigne alors la base langagière "floue" de la translation axiomatique du standard fini en non standard infini fondée sur l'Internal Set Theory (IST). L'axiomatique ZFC définit des objets standard par une "procédure canonique d'individuation-dénomination". "Par exemple, la suite inépuisable des entiers effectifs 1, 2, 3... est une suite d'objets standard, chaque entier "intuitif" possède sa formule caractérisante dans ZFC, comme les logiciens le savent bien ; il y a par suite un ensemble fini pour contenir cette suite pourtant "intuitivement" infinie : c'est dire que cet ensemble sera formellement fini". Or, dialectiquement, l'IST permet dans ce cas "l'inclusion de l'infini inachevé dans le formellement fini, [situation] qui se généralise donc à l'univers des ensembles... Les objets nommables apparaissent comme ceux dont la prise en compte ne nous fait pas "vraiment" sortir du fini : on peut rattacher la collection des objets standard à l'infini de l'effectivité". Il n'en est pas de même des objets non standard qui, apparemment, n'ont rien à voir avec cet infini : "ils sont en quelque sorte clandestins, non univoquement déterminables, non véritablement identifiés par le discours formel-ensembliste. Mais... ces objets apparaissent du seul fait que la profusion formellement infinie, échappant à la logique du fini, est postulée: cette profusion permet l'application du schéma d'idéalisation, et fournit ainsi des éléments non standard. Comment définir un tel schéma relevant d'une métamathématique ?

En traitant l'IST comme une "extension conservatrice de ZFC [par] raisonnement infinitaire (principes d'induction et de choix) qui embrasse l'ensemble des mathématiques". La théorisation se fait "par une technique de "modèle intérieur" faisant appel au concept d'ultra limite". D'une manière métaphorique et imagée, "les éléments non standard ainsi"instaurés"[dans ZFC] par IST "reflètent en quelque sorte, à l'intérieur des totalités infinies, l'infinité même de ces totalités, entendue au sens de la transcendance qui leur est formellement conférée sur le fini lui-même formel". Ces éléments "témoignent si l'on veut de l'excès sur le fini accepté avec l'axiome de l'infini... Ce témoignage est "élémentaire", ce sont des éléments qui témoignent, et par suite l'infinité de la totalité est un sens dicible au premier ordre", indépendamment des ensembles et de leurs rapports avec les parties.

Schéma interprétatif :



Explication : "L'herméneutique formelle permet de concevoir [la] transcendance comme celle d'entités imprévues, inassignables ou partiellement déterminées, qui s'ajoutent dans la même ouverture. Un entier infiniment grand interprète ou reflète ainsi la transcendance de l'infini de N sur tout ensemble fini, ou de l'infini formel sur le fini effectif et, à vrai dire, sur l'infini de l'effectivité lui-même, sans endosser à chaque fois la stature de l'ensemble, pour l'opposer à l'individualité de l'élément, puisqu'il est lui-même élémentaire... La théorie des ensembles comme telle n'est pas une théorie des ensembles. C'est une théorie au premier ordre d'objets sans teneur et sans identité ; mais dans son usage classique, on ne cesse pas d'y mettre en scène ce qui est construit comme totalité dans son vivant contraste avec ce qui est pris localement ou momentanément comme simple".

Plus qu'une conclusion, l'herméneutique formelle de l'infini est une base pour une approche globale de la pensée mathématique mettant en jeu les contraintes et les limites qui caractérisent son rigorisme de principe, lorsqu'on prend en considération les constituants linguistiques, sémiologiques, logiques, philosophiques, impliqués par le passage de cette pensée du fini à l'infini, de la récurrence à l'induction et à la régulation, du discret au continu. Retenons à cet égard, et dans une perspective logologique d'ouverture, le rapprochement suggéré par l'auteur entre l'argument de Wittgenstein concernant l'énoncé d'une règle de portée infinie par un texte fini ne pouvant de ce fait fixer l'application de la règle, et le rôle des axiomes en tant qu'instruments définitoires et normatifs de théories "consistantes" et évolutives telles que les développe E. Nelson.

L'herméneutique de l'espace implique, de manière plus évidente, la capacité symbolique neuronale originaire du sujet. Le terme "espace" pose en effet le problème en termes d'intuition. "L'intuition de l'espace ... est putativement intuition optique, ce que j'intuitions est ce que je vois". Nous sommes ainsi entraînés vers une nouvelle forme de négation métaphysique par laquelle "l'herméneutique de l'infini ne peut être dite se régler sur une intuition de l'infini qu'au prix de l'arrachement de ce mot à toute connotation optique, voire à toute connotation de rapport à la présence. Toute herméneutique selon nos termes s'enracine dans une familiarité-désaisissement originaire".

Une autre inférence idéelle permet une translation complémentaire d'ordre philosophique : il s'agit de se libérer de la localisation spatiale pour passer à la temporalité comme trait absolu du continu herméneutique. L'équivalent géométrique de cette démarche se trouve dans la topologie quand la notion d'ouverture, appliquée à la localité, transforme celle-ci en notion indéterminée : "une localité qui peut être n'importe quoi entre le vide et l'ensemble substrat entier", un lieu "abstrait" de la localité. Il s'agit ainsi de convaincre les mathématiciens de ne pas penser les espaces topologiques en termes géométriques, c'est-à-dire, comportant une dimension numérique localisatrice.

La contribution non standard à l'herméneutique de l'espace est aussi présentée comme un changement de perspective pour le traitement de la localité en vue de la mesurer suivant un ordre numérique même si le modèle est "d'essence temporelle et modale". La formalisation se fait alors par le calcul du "halo" infiniment petit positif d'un nombre réel x constitué par l'ensemble externe des réels infiniment proches de x , lequel se divise en sous ensembles externes indiquant des degrés de proximité. L'herméneutique formelle se révèle potentielle et approchée comme dans la formule Epsilon-halo de x quel que soit ϵ :

$$E.hal(x) = \{ y \mid \forall \epsilon \mid y - x \mid \leq \epsilon \}$$

Une question se pose avec une particulière acuité à ce stade de la modélisation interprétative : Jusqu'où le langage peut-il conduire l'homme en quête de connaissance entre abstraction et référence ? A la fin de son ouvrage, Salanskis donne quelques réponses possibles non exclusives. Le rapport entre l'épistémologie et la réflexion transcendantale est présenté comme complémentaire d'une intuition jugée trop simpliste. Il pourrait s'agir d'une tentative philosophique de présenter comme scientifique la connaissance de la connaissance, la démarche topique "phéno-transcendantale", appliquées à la capacité cognitive humaine, "connaissance des facultés cognitives de l'animal humain, relativement auxquelles l'appareil psychique joue sans doute un rôle dominant". Fondamentale est la question "Que puis-je savoir ?" par laquelle on parvient aux questions essentielles de la mathématique : infini, espace, continu, nombres. "Du questionnement à l'accomplissement-comme-droit-de-réponse-à-la-question interviennent le sujet, l'intersubjectivité et l'histoire élaborant ce qui vaut comme règle permettant d'exploiter les possibilités disponibles à priori et développées, en mathématique notamment, en tant que lieu de la clôture méthodologique et herméneutique de l'humanité langagière". Mais comment passer du questionnement herméneutique à une dialectique formalisatrice ? D'autres réponses ont été proposées.

* * *

Le théorème de Löwenheim-Skolen est présenté comme suit par J. Ladrière (La formalisation, Cahiers pour l'Analyse, 1969 : 108 sq) : il se donne pour objectif de définir les langages formels en les distinguant de "la sorte d'incapacité congénitale du formalisme à fournir une représentation adéquate des spéculations infinitistes". Telle est la fonction attribuée à une "logique des prédicats du premier ordre" (sigle LP).

Les structures sémantique et syntaxique du langage constituent la base du théorème et de ses développements. Une théorie peut en effet être formalisée de deux manières. Par la méthode sémantique

extrinsèque qui "consiste à décrire la classe des propositions formant [cette] théorie en suivant pas à pas le processus de construction de ces propositions" appliquées à un domaine défini d'objets, structuré par une certaine collection de relations". Par la méthode syntaxique et intrinsèque qui "consiste à isoler, au sein de la théorie, une classe particulière de propositions appelées axiomes", énumérées et développées suivant des règles permettant d'obtenir toutes les propositions déductibles dans un système formel. Le problème ainsi posé concerne le rapport à établir entre ces deux approches théoriques : Comment axiomatiser celle décrite sémantiquement et inversement ?

En bref, la LP se définit axiomatiquement par deux règles de déduction à partir d'axiomes : d'une part le modus ponens (Si $A \supset B$ et A est un théorème, alors B l'est également) ; d'autre part, la règle de généralisation (Si $A(x)$ est un théorème, alors $(x)A(x)$ l'est aussi).

La caractéristique sémantique réside dans une interprétation faisant une place à l'empirie. Elle permet d'associer à chaque proposition de L [langage dans lequel est formulé LP] soit la propriété "vrai" soit la propriété "faux"... compte tenu d'un certain domaine D d'objets dont les membres seront considérés comme des individus", par exemple, l'ensemble des nombres entiers. Deux applications sont alors Possibles : "l'assignation individuelle associant à chaque variable individuelle de L un objet et un seul du domaine D " ; "l'assignation prédicative qui associe à chaque variable prédicative à n arguments de L une relation et une seule définie sur D , c'est-à-dire un certain nombre de n -uples formés d'objets de D ", par exemple, une relation double d'entier à entier : $2, 1$; $4, 2$; $6, 3$...

Le concept de domaine D est essentiel pour exprimer la liaison entre abstraction et référence. Une proposition est dite valide "dans un domaine donné si elle est vraie pour toutes les assignations possibles... pour toutes les interprétations relatives à ce domaine. Elle est dite exemplifiable dans un domaine donné si elle est vraie pour les assignations individuelles et prédicatives au moins relativement à ce domaine 'ou dans une interprétation de celui-ci..."

"Fournir un modèle d'une théorie déterminée, c'est en somme, se donner l'image de cette théorie sous la forme d'une certaine structure (le domaine muni des relations associées aux prédicats de la théorie), autrement dit, c'est fournir une sorte de réalisation concrète de la théorie". Une définition à retenir car elle implique la capacité et l'action symboliques : une formulation de la théorie placée entre l'interprétation d'un domaine, la conception de modèles possibles et une structure cohérente entre forme et sens.

Le théorème de l'adéquation des propositions valides de L et des théorèmes de LP est une "métathéorie de la cohérence qui s'énonce comme suit : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe de propositions de L soit cohérente est qu'elle admette (au moins) un modèle".

Le théorème de LP montre ainsi l'inadéquation de la théorie des ensembles reposant sur une incohérence des concepts mathématiques qui se trouvent relativisés du fait de la diversité des domaines où ils sont interprétés. Ils prennent un sens différent en passant des mathématiques dénombrables dans le domaine fini aux mathématiques intuitives du domaine infini. Le rapprochement de la théorie axiomatique des ensembles et de la théorie axiomatique des nombres entiers est révélateur d'un paradoxe entre un modèle fondé

sur les ordinaux et un modèle fondé sur les cardinaux. La théorie infinitiste "ne réussit donc pas à caractériser l'ensemble des entiers" sans créer un "modèle non régulier" pour interpréter par induction une "propriété d'entier" dans une logique du second ordre passant du principe du continu au principe de la totalité des ensembles d'entiers.

On constate que la prise en considération du substrat langagier est essentielle dans cette problématisation de l'axiomatique permettant de substituer le "Comme... si" à la déduction en témoigne l'utilisation de termes tels que cohérence, interprétation, modèles possibles, intuition, indicateurs d'un domaine théorisable. En voici des formulations selon l'auteur : "Les expressions d'un système formel ne sont pas vraiment expressives ; elles représentent, elles fournissent un équivalent tangible des opérations de la pensée intuitive, elles ne signifient pas comme celle-ci. La vertu représentative du système... est précisément liée à cette abstraction qui détache, dans le système, les expressions des significations. Le système formel exhibe, pour ainsi dire à l'état pur, dans une sorte d'en-soi autosuffisant, le schème des structures possibles... La forme devient objet... La pensée intuitive, par contre, n'isole pas ses expressions de l'intention signifiante qui les porte... La fécondité du formalisme est rétrospective, celle de la pensée intuitive anticipatrice... au risque de se perdre dans l'indicible". En bref, une manière de reconnaître l'ambiguïté et le vague comme sources potentielles d'information et de sens à des niveaux de conception hypothétiques mais inévitables comme dans les types de modélisation que nous présentons plus loin.

* * *

L'approche de R. Robinson présentée par J. Petitot (CNRS, Mathématique non standard (MNS), Fondement des sciences, Paris, 1989 : 187 sq) permet d'approfondir formellement l'apport cognitif des signes contextualisés par les règles linguistiques. Dans une sémiologie de signifiants sans signifiés, de mots sans dénotations, le sens est à rechercher dans la qualité de relations abstraites mais structurées. L'interprétant au sens de Peirce devient déterminant par référence aux légisignes et aux arguments. Il s'agit alors de "purs signes" : les "symboles de quantités non désignées" (Carnot), les "idées de valeurs métamathématiquement intermédiaires" (Lautman),¹ "Epsilon-calculus" (Hilbert), autant d'expressions permettant de représenter "in individuo" l'idée d'un individu ou d'un objet satisfaisant une qualité F :

$$\exists x F(x) \equiv \epsilon F.$$

En revanche, $\forall x F(x) \equiv F(\epsilon F)$: la négation de F signifie "un terme vide". Le paradoxe devient constructif en se situant dans la logique booléenne rien-tout, 0-1. Cette relation binaire relèverait d'une "syntaxe de la cohérence logique d'un calcul symbolique et non pas numérique du continu", ni d'un "point de vue sémantique de l'adéquation de ce calcul à la réalité [connotant la vérité]".

Une hiérarchie normative créée par interprétation un haut et un bas afin de définir ("comme si") l'émergence de règles nouvelles : "Les règles du fini réussissent dans l'infini comme s'il y avait des atomes"; "les règles de l'infini réussissent dans le fini comme s'il y avait des infiniment petits métaphysiques". Ainsi formulées, ces liaisons ont un sens implicite de nature idéo figurative supposé renvoyer à l'état psychologique

dubitatif d'un lecteur. Cela n'est pas contradictoire avec le message non standard proposant un lien verbal entre des pôles infinis tels que l'atomique et le cosmique, la mécanique quantique et les trous noirs. On peut concevoir de la même manière un rapport entre la sélection naturelle, la neurobiologie et le langage humain.

La théorie logique des modèles de Robinson explicite cette perspective linguistique en distinguant syntaxe (formaliste) et sémantique (interprétant) dans un schéma de définitions sémiologiques (op.cit.: 190-195) :

Syntaxe (formaliste)	Sémantique (interprétant)
- "Utilisation d'un langage formel L du calcul des prédicats"	- "Une interprétation de L dans A"
- "Dédution, dérivation d'une formule $\emptyset$ de L à partir d'un ensemble de formules de L (notation $\Sigma \vdash \emptyset$)"	- "Vérité ou validité des énoncés : si l'énoncé $\emptyset$ est valide dans A (notation $A \models \emptyset$) on dit que A est un modèle de $\emptyset$... on généralise trivialement à un ensemble d'énoncés Σ .
- " Σ est consistant (s'il est impossible de dériver une contradiction) ; on appelle théorie de Σ (notation TH (Σ)) l'ensemble des énoncés dérivables de Σ ". M (Σ) désigne la classe des modèles dérivables de Σ .	- "on appelle théorie de A (notation TH (A)) l'ensemble des énoncés valides dans A. Par définition A est un modèle de TH (A)."

Cette conception de l'interprétation linguistique des formes, théories et modèles appelle commentaires et développements concernant notamment le rapport à priori entre langue (L) et pensée (A) le "lieu" problématique étant la translation d'une déduction cohésive dans un univers de propositions et de formules logiquement reliées, et des énoncés référentiels dont la cohérence doit être supputée dans un univers hors limite. Car, "si toutes les théories [TH (A), TH (B)...] étaient finalement axiomatisables et catégoriques, il y aurait équivalence entre syntaxe et sémantique. Mais cela est loin d'être le cas".

Une telle théorisation imparfaite n'est qu'une interprétation finitaire d'une construction langagière s'inspirant de liaisons par idéo figures pour définir une métamathématique informelle substituée à une axiomatique toujours incomplète. Les liaisons par connexion et inférence (métaphore et métonymie) donnent une signification au rapport entre deux langages : un langage formel l'interprété dans un ensemble d'énoncés fiables ($\emptyset$ et A) constitué en modèle, en vue d'établir une relation langagière équilibrée au profit de nouvelles supputations formelles TH A et TH V . La transcendance autorise à formuler un tel rapport entre intension symbolique globalisante et extension localisée et validée concrètement, ainsi en est-il d'une "structure de premier ordre" simplifiée et des "catégories" compatibles avec cette structure à caractère général voire métaphyque. La limite de ce rapport contenant-contenu est le tout et le rien correspondant aux deux positions extrêmes

sans significations possibles. Telle est la logique qui a pu guider Leibniz dans sa qualification des infinitésimaux en tant que nombres lorsqu'il qualifia des signes tels que Δx et $\Delta x / \Delta y$ comme des "vides" dépourvus de sens sauf dans une perspective infinitaire.

La modélisation est au centre de cette logique interprétative qui admet comme existant ce qui est non contradictoire dans une perspective d'ouverture langagière où le sens est créée par adaptation et univocité de la syntaxe et de la sémantique. La théorie de la "compacité" précise qu'un "ensemble d'énoncés Σ de L est consistant (non contradictoire) si il admet un modèle" et "si tout ensemble fini Σ_f de Σ admet un modèle alors Σ admet un modèle".

Dans le même ouvrage (CNRS op.cit. : 213 sq) Harthong et Reeb soutiennent cette idée par opposition au réductionnisme formaliste (Hilbert, Peano) supposé en "guerre idéologique" avec l'intuitionnisme qui interprète la réalité dans son ensemble et non par la réalité formelle réduite au principe du tiers exclu. Cette approche est fondée sur la méthode constructive qui traite dialectiquement la "relativité historique et sémantique", la précédence et la conséquence, à l'exclusion de toute convention concernant les rapports du vrai et du faux fondés sur une négation stricte et absolue. Ce qui est ainsi reconsidéré, c'est la fonction cognitive du langage entre une pensée abstraite et dialectique et des percepts à propos desquels les mathématiciens n'ont d'autre pouvoir que d'élaborer des hypothèses pouvant aboutir à des modèles consistants dans le cadre de la théorie des ensembles internalisés (IST). "La clé de l'intuitionnisme est donc la prise en compte de l'écart irréductible entre un modèle théorique quelqu'il soit et la "réalité", entre un concept de la théorie et son référent objectal ou contenu sémantique". Cette valorisation de la pragmatique est faite à partir de règles jugées "extrêmement banales dans les sciences de la nature" : elles prennent en considération le doute et la commodité, comme conserver une théorie fausse sur un point peu important, avoir une théorie de rechange, préférer une théorie fausse mais facile par rapport à une théorie moins fausse mais plus difficile ou coûteuse, nier la valeur de la négation appliquée à une observation jugée moins vraie qu'un théorème. Ainsi convient il de dédramatiser le débat sur le fondement des mathématiques et que l'infini soit perçu comme une multiplicité d'interprétations possibles d'ensembles N différents suivant telle conjecture axiomatique jugée vraie ou fausse ou déçue comme une abstraction inaccessible à la symbolique humaine, et donc surnaturelle ou démontrée dans un tiers cas par une approche arithmétique transcendantale (non standard). Le détail "anecdotique" caractérise autant un nombre tel que $n = 10^{1000000}$ que le formalisme limité au "fini" ou que la connaissance de la "réalité ultime" du système solaire dans le cosmos.

Le physicien R. Feynman (La nature des lois physiques, Paris, Marabout Université, 1971 : 47, 152, 188-189, 198, 201) adopte un point de vue réaliste plus sceptique en ce qui concerne un infini douteux. Sa présentation se fonde d'abord sur une définition pragmatique du langage formel : "les mathématiques ne sont qu'un langage, et je veux pouvoir traduire ce langage... Mais je ne pense pas que cela soit possible, parce que les mathématiques ne sont pas juste un autre langage. Les mathématiques sont un langage plus le raisonnement, comme une logique ajoutée au langage. Les mathématiques sont un outil pour le raisonnement". Quant à la science, elle "consiste seulement à dire ce qui est le plus probable ou le moins probable, et non à prouver ce qui est possible ou impossible". Globalement, il est cependant possible de "discuter le monde à plusieurs niveaux, suivant une certaine hiérarchie... Ainsi, nous avons à une extrémité les lois fondamentales de

la physique. Puis nous inventons des concepts qui ne sont qu'approximatifs, qui s'expliquent finalement, pensons-nous, par le jeu des lois fondamentales". Au sommet de cette hiérarchie se pose la question : "Quelle est l'extrémité la plus proche de Dieu, si vous me permettez une métaphore religieuse ? ... Je crois qu'aucune des deux extrémités n'est plus proche de Dieu. Se tenir à l'un des bouts, et ne poursuivre son chemin que dans cette direction, espérant y trouver la compréhension complète, est une erreur".

Et c'est à ce niveau que se positionne l'infini : "Quand on prend la mécanique quantique, plus la relativité, plus la proposition que tout doit être local, plus un certain nombre de suppositions tacites, on tombe sur une contradiction, parce qu'on obtient l'infini lorsqu'on calcule diverses quantités, et si on obtient l'infini, comment peut-on dire que cela s'accorde avec la nature ?... Nous ne savons donc pas exactement quelle supposition nous faisons qui nous donne le problème des infinités. Un joli problème ! Cependant, on s'aperçoit qu'il est possible de balayer les infinités sous le tapis, par une ruse grossière, et de pouvoir, provisoirement continuer nos calculs": " Plus précisément, "nous avons ces infinités qui interviennent lorsque nous mettons toutes les lois ensemble, mais les gens qui balayent la saleté sous le tapis sont si malins qu'on en arrive à croire que ce n'est pas un paradoxe sérieux..."

* * *

L'idée de l'infini (que l'on peut faire remonter à l'élaboration symbolique du langage humain probablement en rapport avec la prise de conscience de l'opposition dramatique entre la vie et la mort, l'esprit et le corps) nous renvoie au problème du langage à la fois intentionnel et instrumental pour un sujet doué d'une capacité symbolique. Considérer les mathématiques comme un langage parmi d'autres, malgré sa spécialisation incontestable, c'est prendre en considération une évolution historique où se manifestent des constantes telles que l'espace et l'infini, reposant sur une élaboration de signes et de signes de signes toujours plus élaborés et complexes, c'est faire avant tout référence à une origine neurophysiologique d'une intellection à la base d'idées, de perspectives telles que l'intension et l'extension, verbalisée par la sémantique et la syntaxe mais aussi par d'autres formes idéo figuratives, projectives, imaginaires avec pour critère le local et l'actuel par opposition à l'universel potentiel ou divin. La liaison entre les productions langagières diversifiées à partir de tous ces substrats interprétables de multiples manières est à la base des grammaires cognitives : théories, idéologies, mythes, dialectes, métaphores, appliquées aux mathématiques dans une perspective d'élargissement et d'enrichissement constants. C'est dans cette conception logologique ouverte que la pensée de nombres réels infiniment grands et incaccessibles a pu prendre place et signification par une formulation qui peut être aussi interprétée comme une onomatopée entre un jeu de langage et une sémantique transcendante pouvant cependant déboucher sur des intuitions, des possibilités, des innovations.

L'interprétation modélisatrice du rapport fini-infini présente un intérêt épistémique plus général en ce qu'il concerne les formes de base des rapports entre une extension récursive relevant d'un fini concret et une intension pouvant faire référence à une projection continue idéale. Il s'agit d'abord de l'invention d'un univers nouveau permettant de relier par une inclusion ensembliste la nature numérique du fini et l'idée transcendante d'une globalisation infinie. Cette opération révèle un état de la connaissance où les

mathématiques sont traitées comme un langage total ayant toutes les propriétés abstractives et référentielles des langues courantes. La compréhension se fait de l'aval vers l'amont et vice-versa, ce qui permet de justifier par accompagnement des inférences de type quantique, mais aussi des connaissances non récursives définies par des repères, des séquences, des régularités dans des processus observables permettant d'élaborer des relations structurelles et des puissances factorielles causales, organisables et interprétables, à différents niveaux d'une théorisation conceptuelle, probabiliste, graphique ; éventuellement, comme les modélisations exposées par la suite.

VI 1.2. La théorie des probabilités : raisons et incertitudes évaluées

Les probabilités ont une histoire relativement récente, considérées d'abord par les mathématiciens comme marginales par rapport à leur discipline, elles en constituent aujourd'hui une branche essentielle. Ce qui était inacceptable en vertu de la certitude, de la pureté et de la sécurité, tant scientifiques que religieuses, est devenu une méthode d'analyse et de modélisation des connaissances hasardeuses impliquant des paris rationnels et argumentés par interprétation de données aléatoires. Ainsi, des possibilités envisagées objectivement par rapport à des données factuelles devenaient l'objet d'une inspiration et, éventuellement, d'une traduction mathématique de l'incertitude subjective. Cette mathématisation du langage commun jugé toujours ambigu est le fait de penseurs imaginatifs : Pascal, Hume, Condorcet, Quêtelet, Cournot et autres. Elle est devenue la base d'une nouvelle approche expérimentale d'une connaissance scientifique probabilisée non sans risques et limites (Dossier Le Hasard, Pour la Science, HS, Avril 1996 ; L'empire des probabilités, Sciences et Avenir, HS, Oct. 2001).

VI. 2. 1. Une nouvelle philosophie mathématique

Dans les Pensées [253-3] Pascal pose le célèbre problème du pari à propos de la croyance en Dieu.

- 1) En distinguant ceux qui font un choix, acceptation ou rejet, et ceux qui acceptent le pari raisonnablement.
- 2) en estimant l'enjeu c'est-à-dire le rapport entre le gain (Dieu, tout) et la perte (néant, rien).
- 3) A chances égales de gagner ou de perdre, la possibilité d'un gain oblige à jouer pour une chance de gagner le meilleur (l'infini) dans une situation où le hasard et la perte sont limités (finis).

4) La situation est cependant différente pour un joueur qui "hasarde certainement le fini pour gagner incertainement le fini, sans pêcher contre la raison". Ce qui est alors déterminant, c'est l'évaluation de la certitude de ce que le joueur expose, par rapport à l'incertitude du gain attendu, autrement dit, une interprétation et un choix faisant référence à un concours de circonstances possibles.

D. Hume (Enquiries Concerning Human Understanding (1777), Oxford, Clarendon, 1975 : Sect. IV, X) au niveau de la philosophie naturelle, propose de distinguer parmi les arguments, les démonstrations, les preuves et les probabilités : "La situation avec la probabilité des causes est la même qu'avec celle des chances... Il y a des causes qui se sont révélées plus irrégulières et incertaines [que d'autres]... Quand on constate différents effets à la suite de causes qui sont en apparence exactement similaires, tous ces effets variés doivent être retenus par l'esprit dans le transfert du passé au futur et être pris en considération quand on détermine la probabilité de l'évènement... Si un grand nombre de perspectives se manifeste alors dans un évènement, il fortifie et confirme celui-ci dans notre imagination, créant ce sentiment qu'on appelle croyance et donnant à son objet la préférence sur l'évènement contraire qui n'est pas renforcé par un nombre égal d'expériences et ne frappe pas aussi souvent la pensée pour transférer le passé au futur".

C'est ce qui distingue les probabilités de la croyance dans "les miracles et les prodiges décrits dans toute histoire sacrée ou profane" lesquels sont acceptés par un acte de foi qui exclut toute contradiction. Le problème de l'interprétation est alors posé en termes probabilistes "présupposant une opposition d'expériences et d'observations qui se manifeste par une position qui en contrebalance une autre, et produit un degré d'évidence proportionné à la supériorité".

Le calcul statistique est alors esquissé : "Cent cas ou expériences dans une situation, cinquante dans l'autre : cela fournit une attente douteuse pour tout événement ; mais une centaine d'expériences identiques avec seulement une contraire, cela impose raisonnablement un degré de certitude très fort".

De Condorcet (in G.G. Granger, La mathématique sociale du Marquis de Condorcet, Paris, PUF, 1956 : Chap. II, IV) rappelons la définition générale suivante : "Une des premières bases de toute bonne philosophie est de former pour chaque science une langue exacte et précise, où chaque signe représente une idée bien déterminée, bien circonscrite, et de parvenir à bien déterminer, bien circonscire les idées". Cet objectif est cependant difficile à réaliser dans "les sciences morales et politiques". "L'arithmétique politique" et la "mathématique sociale" se fondent sur une nouvelle approche de la fonction épistémique de la langue, contraire à celle de Newton car n'excluant pas "une rhétorique toujours enrichissante", l'emploi de "méthodes techniques évoquant l'art des tableaux et des classifications", et conduisant au calcul des probabilités.

Concernant ce calcul, Condorcet y voit la "partie des mathématiques qui occupera davantage ce zèle pour le bien commun des hommes qui, devenu le caractère de ce siècle, précisément parce qu'il est le premier où il ait existé de véritables lumières, domine surtout dans les sociétés libres". La probabilité trouve ainsi un fondement dans la philosophie des Lumières à laquelle elle participe en tant que méthode de pensée pour "l'élucidation des concepts et l'articulation des données à l'expérience". Elle devient le calcul permettant de

mesurer le "motif de croire", lequel augmente proportionnellement à sa grandeur, mais aussi en rapport avec l'expérience du passé et l'historicité de l'homme.

Dans Mathématique et Société (R._Rashed (Ed.) Paris, Hermann, 1974:106 sq), l'auteur définit "une science nouvelle : l'arithmétique politique... dont les opérations ont pour but des recherches utiles à l'art de gouverner les peuples, telles que celles du nombre des hommes qui habitent un pays ; de la quantité de nourriture qu'ils doivent consommer ; du travail qu'ils peuvent faire ; du temps qu'ils ont à vivre ; de la fertilité des terres, de la fréquence des naufrages, etc..." En bref, un programme que développeront les statistiques publiques, mais le calcul des probabilités s'applique également à la chronologie historique fournissant les éléments d'une critique des témoignages et des aussi reconstitutions postérieures; il offre aussi une approche de la "science de la décision".

Au XIX^{ème} siècle, la pensée probabiliste se précise par une modélisation logique et mathématique. Dans cette lancée philosophique, P. Boole (Les lois de la pensée,_(trad.) Paris, Vrin, 1992 : Chap. 15-22) passe des symboles logiques à une interprétation mathématique des symboles langagiers par une analyse contradictoire de la logique aristotélicienne fondée sur l'axiomatique et de la probabilité; en tant que processus constructif de l'intellect. "La logique scolastique peut être ramenée à des règles générales appliquées à des prémisses permettant d'égaliser le résultat des extrêmes. Quel que soit l'intérêt de ce "système associé au développement même du langage", la logique" n'est pas une science mais une collection de vérités scientifiques trop incomplètes pour former à elles seules un système et pas assez fondamentales pour servir de base à un système parfait".

La théorie des probabilités substitue à cette élaboration déductive de la vérité "un objet de réflexion indépendant, aux modalités fondamentales ... [dont] la perfection consiste en une unité de conception et en une harmonie des procédures". Faisant référence à Pascal, Poisson et Laplace, l'auteur définit la probabilité comme une raison de croire en la survenance d'un évènement, et comme une mesure des cas favorables à cet évènement par rapport au nombre de cas possibles, également vraisemblables. Interviennent dans cette approche "une espérance fondée sur une connaissance partielle", et sur l'émotion, l'opinion et la sensation", considérées comme "objets de recherche scientifique". Les règles d'évaluation numérique sont totalement indépendantes de ces phénomènes mentaux, elle "reposent sur le postulat que l'avenir ressemble au passé, que dans les mêmes circonstances, le même évènement tendra à se répéter selon une fréquence numérique déterminée... L'élément de probabilité se rapporte à la vérité des propositions et non pas à l'occurrence des évènements à propos desquels elles affirment quelque chose". Ainsi est définie une modélisation originale du rapport entre langue et calcul axiomatisé le siècle suivant par Kolmogorov. Il est toujours possible, quel que soit la nature de l'évènement probabilisé, de déterminer "par application du calcul logique, son expression comme une combinaison précise d'autres évènements et d'établir, de manière définie, la totalité des relations existant entre ces évènements". Ces deux aspects, logique et numérique, de la connaissance sont affaire d'interprétation et d'hypothèse dont la fiabilité évolue factuellement et temporellement. Elle varie suivant les informations disponibles ou suivant le nombre de cas connus, mais aussi suivant l'incertitude des hypothèses lorsqu'il s'agit des évaluations probabilistes appliquées à de phénomènes sociaux (en l'occurrence, la pro-

tabilité des jugements d'assise). Il s'agit là d'une "limite d'un processus indéfini d'abstraction" impliquant une faculté de compréhension finie. Cependant, "il pourrait y avoir des raisons, même scientifiques, de penser qu'un certain rapport à l'infini et à l'inconditionné est constitutif de la nature humaine". L'autorité de cette connaissance est différente de celle des lois de la nature mais elle fait intervenir le langage ordinaire avec des termes comme "univers" ou "éternité" et la logique avec le "vrai", autant de signes avec un sens plus vaste et fictif, hors des limites de l'imaginaire.

VI. 2. 2. L'axiomatique problématisée

Les écrits de H. Poincaré mettent en valeur les approches de la vérité par la probabilité en insistant sur le rôle décisif qu'elle a joué dans le développement de la pensée mathématique contemporaine, plaçant au centre du débat l'incertitude et le déterminisme, la subjectivité et l'objectivité ; la transformation des formes mathématiques s'opérant à deux niveaux : le niveau concret du percept et le niveau abstrait du calcul.

Dans La science et l'hypothèse (Paris, Flammarion, 1902 : Chap. XI) sont exposés les concepts et les raisonnements définissant une épistémologie fondée sur une langue spécialisée dans l'exactitude des formes et sur une réflexion probabiliste impliquant une incertitude. "Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à l'incertitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? ... Comment expliquer cette apparente contradiction ?" Une réponse possible est : "la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables au nombre total de cas possibles". Encore faut-il que les cas possibles soient également probables comme dans le cas des pièces de monnaie et des dés. Souvent cette condition rend la situation complexe ce qui renvoie au "bon sens intuitif" et aux "conditions" pragmatiques. Ainsi pourrait-on qualifier la découverte et l'application des lois formelles dans le temps en minorant leur falsifiabilité par un jugement tel que "cela est bien peu probable". Ce serait alors "la science tout entière dont la légitimité serait révoquée en doute", car n'ayant plus qu'une "valeur pratique".

Une autre manière de traiter ce paradoxe consiste à distinguer la probabilité subjective en tant qu'évaluation aléatoire sans garantie comme dans le cas du joueur qui veut tenter sa chance, et la probabilité objective fondée sur le calcul et la discussion permettant d'évaluer rationnellement un risque, par exemple, en matière d'assurances. La rationalité est alors ramenée à un certain nombre de problèmes impliquant des combinaisons de formes et de données factuelles dans l'espace-temps suivant des règles d'approximation constituées en grammaires évolutives.

Un cas limite est la loi des grands nombres fondée sur une transcendantalisation du problème posé quand la crédibilité s'accroît sensiblement avec le nombre de cas possibles. Ce nombre peut être fini dans un premier degré (coups de dés limités à trente-six possibilités) ; ensuite, il peut atteindre l'infini ("probabilité pour qu'un point intérieur à un cercle soit intérieur au carré inscrit") ; mais il devient indéterminé lorsqu'on "cherche à deviner la loi la plus probable d'après un nombre fini d'observations":

Une autre condition se rapporte à l'ignorance du sujet laquelle ne peut être absolue ce qui rendrait toute probabilité inconcevable en tant que "science incertaine". Une connaissance de base concerne deux états successifs du système étudié à un moment donné : "son état initial et la loi d'après laquelle cet état varie". Cette approche causale incontournable rend possible quatre niveaux d'ignorance selon qu'est connue la loi ou l'état initial ou l'inverse, ou que les deux soient ignorés.

C'est par rapport à cette dernière approche que se situerait l'inférence que l'on pourrait qualifier d'idéo figurative par connexion de liaisons, de cause à effet ou d'effet à cause, qui renvoie à la probabilité des causes fondée sur la méthode expérimentale. "Est-il probable qu'il y ait une loi générale d'après laquelle x serait proportionnel à y et que les petites divergences soient dues à des erreurs d'observation?" Telle est la question que l'on est amené à se poser à partir de conventions hypothétiques concernant, d'une part "le principe de raison suffisante", d'autre part "l'importance du fait que certaines propriétés sont communes à toutes les fonctions continues".

Exemple : "Je veux déterminer une loi expérimentale ; cette loi, quand je la connaîtrai, pourra être représentée par une courbe ; je fais un certain nombre d'observations isolées ; chacune d'elle sera représentée par un point. Quand j'ai obtenu ces différents points, je fais passer une courbe entre ces points en m'efforçant de m'en écarter le moins possible et, cependant, de conserver à ma courbe une forme régulière, sans points anguleux, sans inflexions trop accentuées, sans variation brusque du rayon de courbure. Cette courbe me représentera la loi probable... Les effets, ce sont les mesures que j'ai enregistrées ; ils dépendent de la combinaison de deux causes : la loi véritable du phénomène et les erreurs d'observation" représentées par la distance des points à cette courbe. Une telle conclusion probabiliste n'a cependant de sens que par rapport à une "idée à priori" concernant le lien entre la courbe loi et les erreurs possibles. Ainsi, pourrait-on dire que la probabilité des causes est élaborée à partir de mesures relatives à une distribution de points, dans un espace métrique, dont les erreurs sont évaluées par rapport à une courbe régulatrice, base de la loi normale de Laplace-Gauss. Cette loi ne peut concerner que des erreurs accidentelles réparties au hasard.

En conclusion de cette interprétation, Poincaré note que le principe de la raison suffisante prend le plus souvent la forme d'une "croyance à la continuité" conduisant à un résultat indépendant de l'hypothèse conventionnelle faite au début. Une inférence significative tient à la généralisation de cette attitude dubitative étendue comparativement aux axiomes géométriques après les innovations non-euclidiennes qui les transformèrent en "définitions déguisées". Cette vision synthétique explicite l'idée d'une mathématique expérimentale dans laquelle la loi de succession d'images abstraites se substitue à la rigueur formelle ; on pourrait en dire autant de la loi de cohérence des informations concrètes interprétables en probabilité. De larges perspectives sont ainsi ouvertes à la recherche au-delà du formalisme classique.

C'est le moment de rappeler les axiomes de Kolmogorov qui, loin d'apporter des informations supplémentaires, formulent au contraire une définition non contradictoire mais tautologique de la probabilité

parce que fondée sur une métonymie réductrice des cas et des événements représentés par une échelle de mesures numériques inspirée de la logique booléenne.

Citons également la critique de l'axiomatique de H. Zetterberg par R. Boudon (Les mathématiques en sociologie, Paris, PUF (SUP), 1971 : 10 sq). Elle ne concerne pas l'objectif poursuivi en vue d'organiser de manière axiomatique les agrégats de propositions de la sociologie, mais les moyens proposés pour y parvenir en donnant une forme logique à des enchaînements de propositions établissant des relations douteuses entre des concepts vagues tels que "prospérité nationale", "classes moyennes"; "mobilité sociale", "consensus". Le motif de cette axiomatique étant de proposer une théorie opposée à celle de Marx, elle ne peut que montrer la difficulté qu'il y a à distinguer une telle approche d'une idéologie. L'emploi du terme "axiomatique" est une fallace ; valorisant une démonstration faible et douteuse de l'implication. Deux interprétations littérales sont alors possibles selon Boudon. Au sens strict suggéré : "le raisonnement est irréprochable, mais on ne voit pas alors comment la "théorie" représentée par les axiomes pourrait jamais être soumise à l'épreuve de l'expérience" étant donnée sa "nature sociale". Au sens faible possible : "le raisonnement devient faux" car les propositions ne peuvent plus être qualifiées de "théorèmes" ne pouvant plus être "empiriquement infirmées" sans que les axiomes soient tenus pour logiquement inacceptables. Précisons que le conventionnalisme de Poincaré permettrait d'éviter une telle situation d'indécidabilité née d'une normativité excessive dans l'analyse du social où la complexité peut être cernée mais jamais maîtrisée ou éliminée.

VI. 2. 3. Modèles interprétatifs entre forme et sens

E. Borel (Traité de calcul des probabilités et de ses applications, tome IV, fasc. III, Paris Gauthier-Villars 1939) justifie à son tour la place qui doit revenir à la "science des probabilités" dans la "science mathématique et la science en général". La théorie des nombres, de l'algèbre, de l'analyse est fondée sur des axiomes et des définitions qui doivent être logiquement respectés pour atteindre des conclusions vraies. En revanche, la probabilité, à l'instar de la géométrie ou de la mécanique, peut s'appliquer à des "objets concrets" qui "ne peuvent être rigoureusement assimilés aux êtres abstraits sur lesquels raisonne le mathématicien". "Par définition même, la connaissance probabiliste ne peut jamais entraîner comme conséquence pratique une certitude, mais, au contraire, une incertitude... En calculant sur des probabilités, on ne peut obtenir que des probabilités" même si, sur le plan empirique, "des probabilités grandes ou petites constituent une signification pratique, base d'une information".

Cette dépendance empirique s'intègre dans un calcul où, par "une convention fondamentale, la probabilité est égale à un 'équivalent à la certitude ou à la quasi-certitude dans les cas où intervient l'infini". Le facteur humain est important pour l'évaluation des ordres de grandeur de la probabilité pouvant être prise en considération de manière significative. Par exemple, à l'échelle humaine, une probabilité inférieure à 10^{-6} est

négligeable ; à l'échelle cosmique, cette valeur est de 10^{-50} pour que l'incertitude soit levée. Des limites doivent également être prises en compte en ce qui concerne l'indépendance des probabilités quant aux facteurs non contrôlés (fonctionnement des instruments) et aux hypothèses négligées parce que peu influentes lors des premières approximations théoriques.

La théorie de l'induction selon J.M. Keynes (A Treatise on Probability, New York, St Martin Press, 1973) constitue une base pour l'interprétation des lois probabilistes. "La probabilité d'une proposition dépend de l'ensemble des connaissances que l'on suppose figurer dans l'esprit de celui qui évalue cette probabilité", c'est-à-dire, des hypothèses émises, d'où la règle : "La probabilité de A [énoncé d'une loi] après l'expérience E, est égale à la probabilité de A avant l'expérience E, divisée par la probabilité pour que E réussisse sous les seules hypothèses H". Ainsi la probabilité des causes est assouplie pour faire place à la subjectivité des références et inférences de nature linguistique. Ce point est développé dans la note 1 du Treatise : "La causalité a pour base une métonymie précedence-cause fondée sur un rapprochement dans le temps et dans l'espace, les causes inaccessibles relevant d'explications surnaturelles ou magiques'...!. Le langage commun devient alors un motif de questionnement consacré par "l'axiome fondamental de la causalité lorsqu'on précise que cette causalité est rapprochement dans le temps et l'espace, [ce qui] est loin d'être universellement vrai ; c'est cependant en partant de cet axiome que les hommes ont pu acquérir successivement un grand nombre de connaissances pratiques et de connaissances scientifiques". D'où un appel au "bon sens" qui permet de passer d'une intuition à une construction puis à une expérimentation afin de circonscrire en probabilité une cause éloignée, imprévisible ou inaccessible.

D'après Keynes (op.cit; : chap. V), cette approche empirique provoque la critique, voire, le rejet, des mathématiciens classiques. Pourtant, les raisonnements permettant de rendre compte de la situation sont nombreux et peuvent se ramener à un pari en vue d'établir une liaison dialectique entre la subjectivité et l'objectivité : "La probabilité d'un cas isolé étant définie pour un individu déterminé, on définira la probabilité objective comme celle dont la valeur est la même pour un certain nombre d'individus également bien informés sur les conditions de l'événement aléatoire". L'intersubjectivité est ainsi prise en compte pour l'évaluation des liaisons entre certitude et incertitude, entre cause et hasard, entre objectivité et raisonnement: autant de repères essentiels pour une grammaire cognitive qui ne peut ignorer le doute inhérent à l'interprétation des symboles et à l'évaluation empirique de l'aléa.

Les principes développés par E. Nagel (Principles of the Theory of Probability, Univ. of Chicago Press, 1969 : 39 sq) présentent la modélisation probabiliste dans une perspective élargie plus conforme à une approche logo logique, visant une interprétation adaptée à un système parmi d'autres concevables. Cet auteur soutient notamment que les calculs de probabilité sont formulés dans trois langages : le langage d'une science en soi, un langage syntaxique sur ce langage, un langage sémantique portant sur la relation entre des expressions de ce langage et la matière étudiées, à quoi nous ajouterions les formes idéo figuratives de connexion et d'inférence rhétoriques. Les calculs peuvent être alors compris et interprétés de plusieurs manières constituant autant d'interférences de la variété sémantique, de la précision logique et de la mathématique. Voici une liste dans laquelle la fonction "Prob" est définie :

1) Comme "une limite des fréquences relatives dans une classe infinie de fréquences, d'où la transformation des postulats en propositions analytiques dans la théorie des nombres réels".

2) Comme "une fréquence relative dans une classe finie de références, certains postulats deviennent alors des propositions analytiques, dans l'arithmétique élémentaire des nombres rationnels [0-1]. (Kolmogorov)

3) Comme "le rapport de la cardinalité entre deux ensembles d'alternatives, les postulats sont alors convertis en propositions analytiques de l'arithmétique élémentaire". (Laplace)

4) Comme "une mesure de "croyances partiales" où un degré de probabilité est une mesure de la force avec laquelle un homme est prêt à agir suivant une croyance". (Ramsey)

5) Comme "le rapport de deux surfaces, les postulats devenant des propositions dans quelque système de géométries

6) Comme un facteur de "conversion de postulats en propositions synthétiques de physique [par] référence aux fréquences relatives dans une classe". (Hempel)

7) Comme "une interprétation sémantique .., suivant laquelle on désigne la fréquence de vérité de phrases dans certaines classes ordonnées de phrases". (Reichenbach)

8) Comme une autre interprétation sémantique dénotant "le degré de fiabilité d'une théorie". (Kopper)

9) Comme "référence au degré d'une relation unique entre une proposition et un ensemble de prémisses", relation pouvant être considérée comme non numérique (Keynes) ou comme numérique (H. Jeffreys)".

Les définitions ouvrent des perspectives par précision et combinaison, à la construction de multiples théories adaptées "vers le haut" ou "vers le bas" aux empiries les plus diverses. Voici quelques illustrations :

La définition 4 suggère une idée probabiliste appliquée à une forme de topique classique et usuelle pour conceptualiser l'action humaine à partir de termes clés. Cette action implique un sujet, un but, une action mais aussi un moyen et une scène entrant en ligne de compte pour une évaluation approchée de la "croyance partielle" et de la prise de parti ou encore de pari.

La définition 6 renvoie à une création par projection d'objets mathématiques par un calcul probabiliste constitutif d'une "complexologie" qui sera explicitée par la suite.

La combinaison des définitions 4, 7, 9 offre une base aux typologies statistiques considérés comme des traductions d'objets sémantiques ou de propositions informatives en une mesure probabiliste significative et commode car permettant un ordonnancement d'opinions et de jugements dans un espace conceptuel probabilisé faisant apparaître ces données classées à plusieurs niveaux dans une structure hiérarchisée où le nombre de types est gradué par des assemblages successifs suivant les similitudes et les oppositions d'attitudes révélatrices de groupes-clés. Dans cet algorithme, l'information de base va décroissant puisqu'on passe d'un niveau où elle est maximale (un individu égale un type) à un niveau où elle est minimale (la totalité des individus égale un type) ; en revanche, la signification et la capacité d'interprétation vont croissantes en fonction des qualités, des seuils et des repères devenus conceptualisables et mesurables (C. Roig, Pour une théorie actualisée des typologies, Annuaire suisse de science politique, 1976 : 9 sq).

VI. 3. L'investigation de la complexité : Quanta, chaos, catastrophes

Concernant le traitement de la complexité, voici des opinions révélatrices de H. Poincaré (Science et méthode, Paris Flammarion, 1908 : 68, 88, 308) ; elles concernent le hasard, la complexité, la probabilité et la connaissance possible.

"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disions que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, alors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement..."

"Depuis le commencement des siècles, il y a des causes complexes qui ne cessent d'agir dans le même sens et qui font tendre constamment le monde vers l'uniformité sans qu'il puisse jamais revenir en arrière. Ce sont ces causes qui ont peu à peu abattu les saillants et rempli les rentrants, et c'est pour cela que nos courbes de probabilité n'offrent plus que des ondulations lentes..."

"Les faits à petit rendement, ce sont les faits complexes sur lesquels des circonstances multiples peuvent exercer une influence sensible, circonstances trop nombreuses et trop diverses, pour que nous puissions toutes les discerner... Sans doute un esprit plus vaste et plus fin que le nôtre en jugerait-il différemment..."

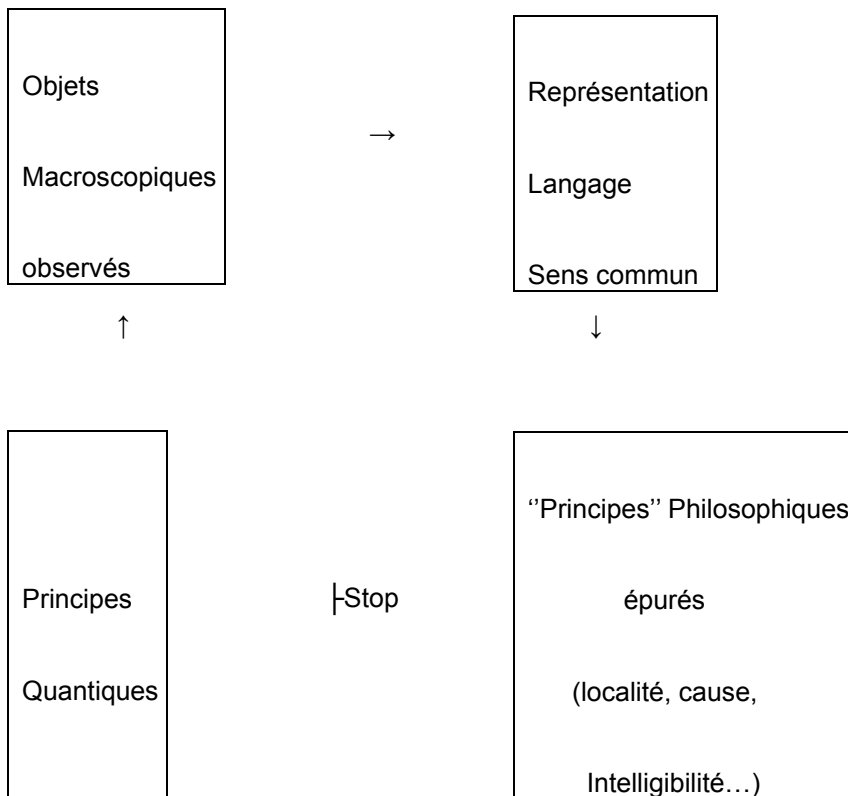
L'investigation de la complexité permet, en principe, une pénétration cognitive d'un univers insolite à partir d'une formalisation complexe de choses possibles mais étranges situées au-delà du déterminisme causal ou probable.; cela par une objectivation à partir de repères (ondes, oscillations, attractions...) que l'on pourrait qualifier de métaphore formelle. C.G. Langton (in J. Horgan, From Complexity to Perplexity, Scientific American, June 1995 : 74 sq) pense qu'une telle connaissance sera de plus en plus accessible grâce à la création d'une "vie artificielle" en vue de succéder à l'intelligence artificielle, changeant la science du futur rendue moins "linéaire" et plus "poétique". "La poésie est un usage très peu linéaire du langage, le sens y dépasse le strict assemblage de ses composants linguistiques". Ainsi, pour les "complexologues" américains, la science arrive actuellement à éclairer "les limites du connaissable" et donc les "limites de la connaissance scientifique". On peut penser qu'il s'agit là d'un nouveau type de questionnement appliqué à une réalité hors du commun comme l'indiquent certaines métaphores imagées : quanta, chaos, catastrophes.

VI. 3. 1. Les quanta

La mécanique quantique se situe dans un espace abstrait avec un nombre indéterminé de dimensions; elle opère expérimentalement, par interprétation objectivante des équations et par l'étude d'une évolution linéaire écartant la problématique d'un état final produit par un état originaire instable. Cette pensée scientifique se trouve cependant déstabilisée par le développement d'une recherche dominée par l'incertitude.

L'origine de la problématique novatrice réside: dans les deux découvertes prestigieuses : la relativité (A. Einstein, H. Poincaré, H.A. Lorentz) et les règles de la transformation quantique (M. Planck, W. Wien, A. Einstein, N. Bohr). Dans les années 1920, les enjeux se précisent à partir des conflits impliquant Einstein, Bohr et Heisenberg. La distinction entre mécanique classique et mécanique quantique est alors établie compte tenu des paradoxes interprétables de celle-ci. Le principe d'indétermination est formulé par Heisenberg, Bohr propose une conception générale des quanta permettant de dépasser les idées paradoxales grâce à la théorie de la complémentarité et au postulat de discontinuité. Question : s'agit-il d'un changement d'univers ou d'un perfectionnement des moyens d'observation ou des deux ?

La théorie prend un tour à la fois intuitif, abstrait , non contradictoire et formel : autant de termes-clés pour l'élaboration d'un nouveau langage intersubjectif fondé sur des formes idéo-figuratives et sémiotiques reposant sur un concret de nature mathématique expérimentale, par interprétations d'objets évaluables. "Un système d'axiomes mathématiques" sert ainsi de fondement à des expériences faites avec les moyens disponibles. Il s'agit bien d'une "complémentarité" par superposition, excluant toute "problématique ontologique pour s'en tenir au niveau du discours et de la représentation, et pour définir une sorte de 'bon usage' de ce discours et de cette représentation" (La grande querelle des physiciens. Troublante mécanique quantique. Science et Avenir, NS, 1984). Le conditionnement pragmatique impose donc une nouvelle conception de la connaissance scientifique à validité étendue que l'on a pu schématiser comme suit (R. Omnès, Une nouvelle interprétation de la théorie quantique, La Recherche, 280, Oct. 1995 : 53) :



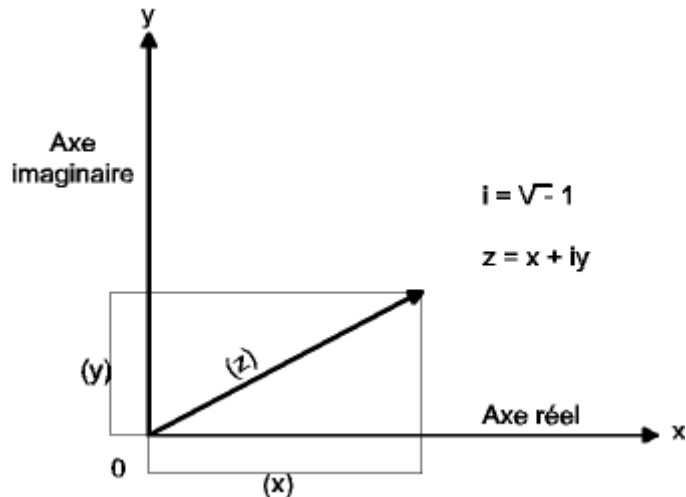
En ce qui concerna la nature et l'utilisation du langage pour la modélisation des "mystères" quantiques et les hypothèses qui sont impliquées, on peut se référer à l'analyse du mathématicien R. Penrose (Les deux infinis et l'esprit humain, trad., Paris, Flammarion, 1999 : chap. 2).

La concrétisation des signes mathématiques est opérée à partir de deux fentes séparant une source de lumière d'un écran. Lorsqu'une seule fente est ouverte, celle du haut ou celle du bas, un photon individuel atteint un point précis sur l'écran. Lorsque les deux fentes sont ouvertes, les photons ne peuvent atteindre ce point : les deux possibilités antérieures s'annulent l'une l'autre. Telles sont les données observables qu'il convient de représenter mathématiquement de manière neutre. Les deux possibilités (A et B) doivent être formulées et pondérées par des nombres complexes W et Z:

$$W \text{ (possibilité A) } + Z \text{ (possibilité B)}$$

Les signes mathématiques sont définis par des fonctions dénotatives ou connotatives de complexité, d'indéterminisme, d'infini. Ils doivent être interprétés en langage quantique : W et Z sont des nombres complexes qui multiplient les deux états possibles pour symboliser leur dualité compensatrice. Ce sont des "ondes complexes de possibilités" caractérisant un système entier de corpuscules en interaction dans un "espace de configuration" irréductible à l'espace ordinaire (L. de Broglie, Continu et discontinu en physique moderne, Paris, A. Michel, 1941 : Ch. III). Penrose définit ces nombres comme des mesures d'énergie (bosons)

qui mettent en jeu la racine carrée imaginaire de -1 pour indiquer trois directions possibles d'un spin égal à l'unité : 1, -1, 0. L'unité de valeur de ce mouvement est $S_z = \pm h / 2 \pi$ où h est une relation entre la quantité de mouvement et la longueur d'onde. Ce rapport entre l'imaginaire quantique et le réel probabiliste est représenté géométriquement dans le plan complexe d'Argand, Wessel, Gauss :



Les entités imaginaires quantiques (i) sont des valeurs disponibles en vue d'être changées en probabilités par le calcul de la somme des carrés de leurs modules : $x^2 + y^2 = z^2$. Les parenthèses de Dirac marquent la particularité de l'état quantique : par exemple, l'état du système A s'écrit $|A\rangle$, la *fonction* d'onde Ψ s'écrit $\Psi = w |A\rangle + z |B\rangle$.

Un tel système est constitué par toutes les possibilités pondérées et superposées en ondes complexes, son évolution au cours du temps est linéaire : les nombres imaginaires et les superpositions sont des constantes (équation de Schrödinger). En bref, c'est un évènement à très petite échelle qui déclenche quelque chose que l'on peut représenter à l'échelle classique par "la réduction de la fonction d'onde" en "vecteur d'état de spin". L'intérêt ne réside pas tant dans la valeur des nombres que dans leurs rapports. Penrose évoque deux types de mystères inhérents à cette traduction du quantique en classique.

1) Les mystères "troublants" concernent les rapports que l'on peut établir entre la mécanique quantique et d'autres phénomènes du monde physique caractéristiques des atomes, forces chimiques, lasers, niveau moléculaire de l'ADN. Sont évoqués le théorème de J. Bell et sa confirmation par A. Aspect, mettant en évidence une non-localisation d'un électron (E) et d'une position (P) émis par une particule de spin 0. Après un "enchevêtrement quantique" pouvant atteindre plusieurs kilomètres, E et P restent connectés de manière mystérieuse sans qu'un message ait pu être échangé entre eux, l'un va ici "vers le bas", l'autre va là-bas "vers le haut".

2) Les mystères "paradoxaux" révèlent l'incomplétude et les paradoxes de ces idéalités théorisées par des signes "purs" : outre les nombres complexes, le zéro, le moins et le pi. Au niveau global, le mystère le plus

marquant est celui de la mesure dans un sens syntaxique, lorsque les règles changent du quantique au classique, de $|\Psi\rangle$ à M_D (la "matrice densité" permettant de calculer les probabilités des résultats de toutes les mesures sur une portion du système quantique).

D'où la conclusion dans une perspective logo logique: ce qui est ignoré • c'est la nature de la relation constatée entre une réalité quantique dénotée par le calcul probabiliste et reconstituée par des inférences relationnelles de type idéo figuratif représentées comme suit :

U		C
Niveau quantique	→	Niveau classique
(équation de Schrödinger)		(Newton, Maxwell, Einstein)

↑

R
Relations :
Réduction objectivée (RO)
Non computables

Les commentaires et hypothèses sont l'expression langagière de la capacité symbolique du cerveau qui permet, d'une certaine manière, notamment par le questionnement, de transcender les localisations spatio-temporelles dans leurs manifestations naturelles. De la mesure, elle permet de passer au concept, puis à la règle supposée suivie par la nature pour alterner les deux possibilités de la gravitation quantique. "Quand ces deux espaces-temps superposables sont-ils suffisamment différents pour qu'il faille changer de règles ? On cherche alors quand, en un sens fiable, la différence des géométries est de l'ordre de la distance de Planck" ou "mur de Planck", à savoir 10^{-33} centimètres en tant que limite. Cette approche est régulée par une échelle du temps nécessaire à la nature pour opérer son choix. La superposition des systèmes étant par hypothèse instable, il est suggéré que la mathématisation de cette physique incomprise prenne en considération "l'énergie E qu'il faudrait pour déplacer une masse [une boule, une goutte d'eau] en dehors du champ de gravitation de l'autre. On prend alors $\hbar$ la constante de Planck-Dirac divisée par 2π et on la divise par cette énergie gravitationnelle". On obtient alors l'échelle de temps T : $T = \hbar / E$ qui permet d'avoir une idée formalisée de manière approximative de l'échelle de temps en question et de la nature de la mesure impliquée.

Dans le chap. 3, l'auteur situe cette problématique dans un type de discours constitué par une relation causale circulaire et pragmatique, érigée en principe, entre un monde platonicien, un monde physique et un monde mental. Les mathématiques se situent principalement dans le monde platonicien, "surtout ceux [de] leurs concepts dont on a besoin pour décrire le monde physique". On peut aussi concevoir que "les constructions mathématiques proviennent du mental", ce qui n'est pas vraiment "la manière dont un mathématicien regarde la vérité mathématique". Reste à comprendre le concept nécessairement vague de "relation entre les niveaux U et C, pour répondre au défi de l'interface langagière tenue de produire une connaissance acceptable conciliant imaginaire et sensibilité, utilisant mesures, repères, intuitions...

Nous sommes ainsi en présence d'une linguistique idéo figurative - certainement déplacée dans la mathématique classique – permettant à des choses ou à des phénomènes de n'exister que par une représentation formelle impliquant connexion et inférence. Cette approche a reçu des formulations et des interprétations diverses illustrant ses aspects psychiques, scientifiques, fictionnels (La grande querelle des physiciens. Troublante mécanique quantique, Sciences et Avenir, NS.46, 1984).

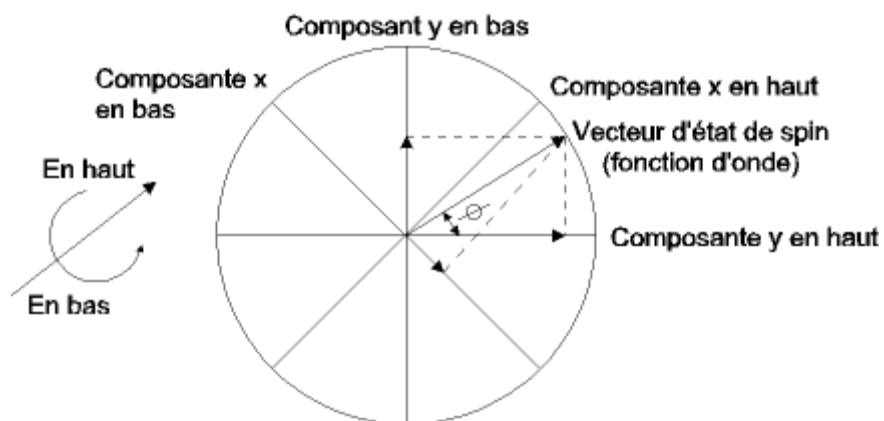
Selon Bohr et Heisenberg, la mécanique quantique est théoriquement à la fois "intuitive" et "complète". Le caractère intuitif de la théorie est d'ordre abstrait et logique : aux images physiques sensibles, la physique des phénomènes atomiques impose qu'on leur substitue un concret de nature mathématique..." La complétude est conférée par "le fait dans son domaine d'objets propres, elle peut donner une réponse à toutes les questions formulables... Elle est munie d'un système de principes simples et rattachés directement aux observations, système dont elle est déductible comme d'un système d'axiomes mathématiques, et toutes les expériences faites ou concevables avec les moyens actuels sont en accord avec elle... Le concept de probabilité prend, avec la théorie quantique, une signification physique nouvelle" (op.cit : 22-sq). Cette révolution dans la pensée mathématique est précisée et nuancée par le paradoxe EPR (Einstein, B. Podolsky, N. Rosen) qui implique "une vision déterministe d'un monde réel existant en dehors de l'observateur". Cette vision est fondée sur trois prémisses : le réalisme, l'induction comme "mode de raisonnement valable", la séparabilité ou localisation qui "stipule qu'aucune information ne saurait se propager plus vite que la vitesse de la lumière", ce qui pourrait être en contradiction avec le théorème de Bell et Aspect cité plus haut.(op.cit : 63 sq). Une conclusion nous projette dans l'abstraction pure "car il existe... des super théories, ou plutôt des "théories cadres puisqu'elles fournissent un cadre général dans lequel on peut construire d'autres théories plus spécifiques... Dans bien des domaines de la physique, l'emploi qui est fait des mathématiques est suffisamment peu soucieux de rigueur pour que l'on soit bien loin des mathématiques véritables" (op.cit...: 63 sq, 93 sq).

Les théoriciens sont ainsi condamnés à chercher des explications dans les langages permettant d'interpréter ces situations "mathématisées" par les expériences. Dans cette optique, La logique quantique de R. Hugues (Pour la Science, 50, 1981::36-U9) propose une révision profonde du langage de la logique classique dont "les processus d'inférence ne sont plus applicables tels quels". Le rôle logique des connecteurs comme "et", "ou", "non", change en rapport avec la nouvelle structure référentielle et conceptuelle de la physique contemporaine. Cette mutation idéo figurative est présentée comme analogue à celle provoquée par les géométries non-euclidiennes, débouchant sur une compréhension plus intuitive et abstraite. "Finalement,

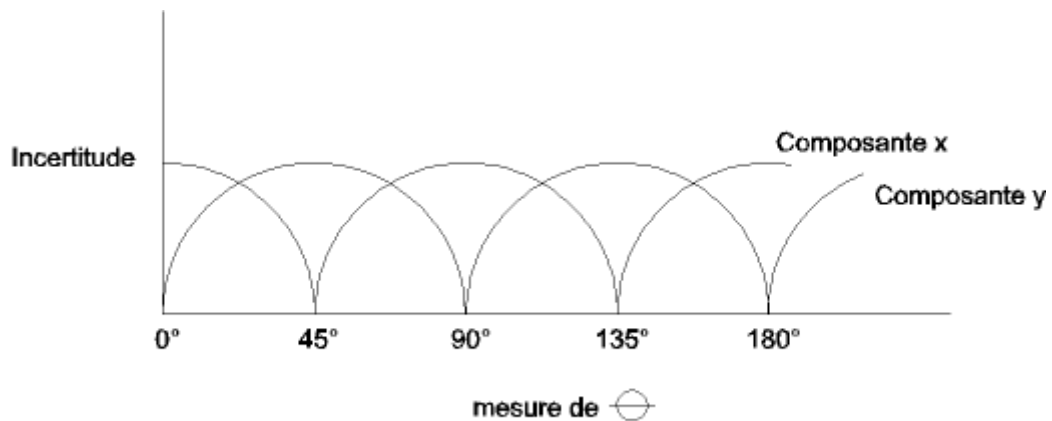
l'interprétation géométrique des divers systèmes formels montra qu'ils faisaient partie d'une même famille". Le rôle de la notion de "courbure" dans ces géométries doit être joué par la notion de "treillis" représentant géométrique des connecteurs logiques dans une théorie physique, en l'occurrence, l'état de spin d'une particule donnant "la probabilité pour que le spin mesuré soit "en haut" ou "en bas" de l'écran de détection".

Ainsi, "le vecteur d'état de spin est un objet mathématique qui possède une grandeur, sa norme ($\emptyset$), une direction et un sens (fléchés). La vecteur d'état de spin est la somme vectorielle, calculée selon la règle du parallélogramme, de deux autres vecteurs portés par deux droite perpendiculaires qui représentent les deux probabilités de trouver le spin en haut ou en bas selon l'axe y".

Diagramme approximatif du principe d'incertitude de Heisenberg :



Variables aléatoires des probabilités d'être en haut ou en bas pour x et y:



Explication : "Lorsque le vecteur d'état s'éloigne de la composante y "en haut" et se rapproche de l'axe de la composante x "en haut" la probabilité de trouver la composante x "en haut" augmente, tandis que toute mesure de la composante y devient de plus en plus imprécise. Si nous continuons à faire tourner le vecteur dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, nous pouvons tracer le graphe des incertitudes de mesure des deux composantes. Quand l'incertitude sur la valeur d'une composante devient nulle, l'incertitude sur l'autre composante est maximale" (op.cit. 40).

En logique classique, les connecteurs "et" et "ou" sont interprétés suivant une formule de distributivité de "et" par rapport à "ou", laquelle correspond à un état du langage :

Si P et $(Q \text{ ou } R)$, alors $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

Ces termes jouent un rôle différent lorsqu'il s'agit de décrire le spin de l'électron, le passage logique précédent n'est plus possible. Dans ce cas :

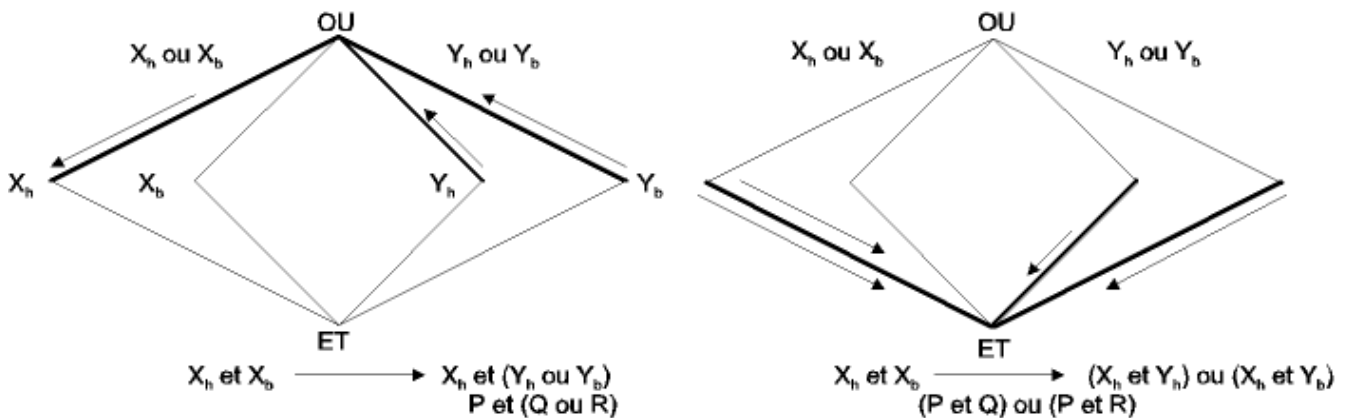
- Si P est la proposition "le spin est en haut selon l'axe x ",
- Si Q est la proposition "le spin est en haut selon l'axe y ",
- Si R est la proposition "le spin est en bas selon l'axe y ",

Alors, si la formule $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ est vraie, la formule $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ doit être abandonnée ou vice-versa dans l'inférence relationnelle quantique caractérisée par l'indépendance des états de spin.

La notion de treillis est l'expression d'une structure logique différente dont voici un exemple concret : deux pièces de monnaie différentes sont placées dans une boîte à couvercle transparent. Quatre états du système physique ainsi constitué sont alors possibles : deux "face", deux "pile", une "face" et une "pile" et l'inverse.

Les relations logiques entre les propositions décrivant le spin d'une particule sont décrites suivant un schéma de même nature avec un treillis arborescent non distributif. "Les noeuds du treillis représentent des propositions concernant les états de spin $[X \text{ en haut } (X_h), X \text{ en bas } (X_b), Y \text{ en haut } (Y_h), Y \text{ en bas } (Y_b)]$. Sur chaque treillis, le connecteur logique "et" correspond à l'opération borne inférieure et le connecteur "ou" à l'opération borne supérieure. Les propositions sous chaque treillis (ci-dessous) sont logiquement équivalentes selon la logique classique, elles correspondent aux opérations indiquées par les flèches. Comme la structure des treillis s'obtient à partir des relations d'inclusion entre espaces vectoriels, les treillis ne sont pas distributifs. Les deux propositions ne conduisant pas au même point "o" du treillis... mais séparément à X_h et à "ET" (op.cit. 47).

Treillis de la double relation logique entre X_h, X_b, Y_h, Y_b (P/QR) :



En conclusion, l'idée d'une modélisation formelle représentant un système physique référentiel, est présentée comme suit : "La logique quantique apparaît lorsque nous examinons la structure mathématique du formalisme de la mécanique quantique. Or, cette structure mathématique se fonde sur les schémas déductifs de la logique classique. Le développement de la logique quantique présuppose donc la logique classique. Nous nous retrouvons avec une famille de logiques qui comprend la logique classique, la logique quantique et peut-être d'autres encore. Parmi celles-ci, la logique classique garde la préséance. Les logiques non classiques peuvent avoir leur propre champ d'application, mais la logique utilisée pour le raisonnement abstrait, en particulier le raisonnement sur la logique, restera probablement la logique classique" (op.cit:49).

Ces définitions prudentes concernent au premier chef la logologie et la souplesse qu'elle introduit dans

le langage en tant qu'instrument d'une complexologie consciente de ses moyens et de ses limites dans le rapport toujours en question entre pensée, connaissances, espace-temps, technologie. C'est le moment de rappeler le pari dont font l'objet les ordinateurs quantiques de la part de physiciens et autres spécialistes. Les difficultés présentées par l'univers des qbits et la découverte de particules efficaces pour une programmation quantique, sont loin d'être surmontées mais les essais continuent dans ce domaine, montrant la continuité du lien entre pensée naturelle et pensée artificielle dans l'évolution logo logique de la formalisation.(J. Mullins, Quantum superbrains, NewScientist, 2346, June 2002 : 24-29).

VI. 3. 2. Le chaos

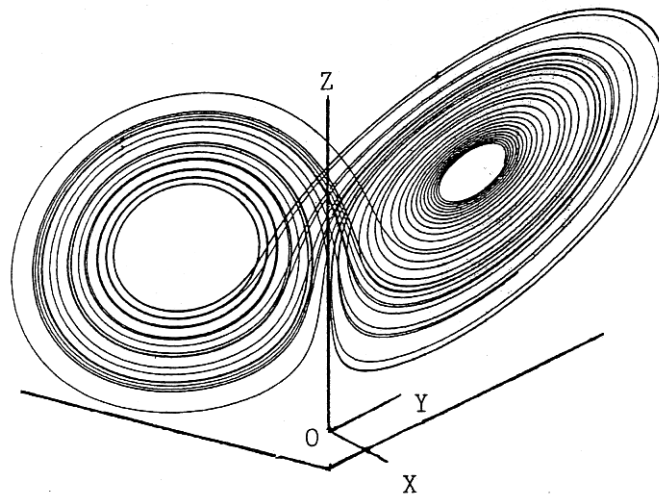
Par sa généralité, le chaos est un terme-clé impliquant trois niveaux de linguistique utilisés de manière originale. Dans le cadre référentiel, les objets d'étude sont des phénomènes qui se manifestent à priori de manière incompréhensible à l'échelle humaine du fait de l'indétermination de leurs composants.- originels et de la soudaineté de leurs manifestations, d'où l'impossibilité de les représenter par des lois classiques. Ils sont connus et observables dans l'espace-temps, mais leur déroulement ne correspond pas à des lois précises qu'il s'agisse de cascades fluviales, de météorologie ou de cataclysme ou encore, de loteries, de fonctionnement du cerveau humain, de crises sociétales ou d'extinction des espèces. Autant de manifestations de causalités multiples et interactives dans des séquences temporelles très diversifiées.

Du point de vue logo logique, le chaos ne peut être qu'interprété, pouvant se situer dans un infini potentiel, il prend place entre une probabilité et une virtualité expérimentales. Cela explique la perplexité qu'il peut susciter chez le chercheur sans cependant altérer le désir de connaissance du rejet au doute, de la prédiction à la transcendance, de la modélisation à une expérimentation adaptée ; à la fois, obstacle et motif de connaissance dans le domaine des sciences physiques et du calcul mathématique.

La notion de chaos prend toute sa signification dans la perspective pragmatique déjà soulignée à savoir l'impact technologique de l'informatique sur la mathématisation du langage et l'analyse formelle. Cette notion présente l'avantage de joindre la complexité de certains objets de recherche et la complexité des instruments d'observation et de calcul qui permettent de les traduire en connaissances accessibles même si elles sont limitées. Ainsi la complexité peut être perçue comme un lien entre les deux faces de ces connaissances, constituant une "complexologie", une "Science en soi". Nous savons que les ordinateurs ont joué un rôle essentiel dans ce développement du processus cognitif auquel participent le cerveau humain et la machine dans une complémentarité complexologique allant au-delà de l'obstacle chaotique en suscitant des formes novatrices de la réalité et de la pensée. Les études que nous présentons tentent d'illustrer cette situation créée par une mathématique constructive.

J.P. Eckmann (Mesures dans un système dynamique chaotique, in D. Dalmedico et al. Chaos et

déterminisme, Seuil, 1992 : 92-128) pose le problème de manière significative d'un point de vue théorique, au niveau de "l'étude du monde de nos expériences quotidiennes" longtemps négligé par rapport à l'étude des particules élémentaires et de l'astrophysique, compte tenu des succès remportés par les théories quantique et de la relativité. Comment expliquer la réhabilitation de la physique classique durant ces dernières décennies ? La réponse se trouve dans un mot-clé : le chaos. En effet, nous avons récemment considérablement progressé dans l'étude et la compréhension conceptuelle des systèmes qui se comportent de manière imprévisible. Cette compréhension a été modifiée fondamentalement par des découvertes nouvelles concernant les phénomènes qui ne deviennent jamais répétitifs ou monotones, ce qui rend, par-exemple, l'observation d'une montre moins fascinante que celle d'un feu de cheminée'. Le chaos peut se présenter de manière plus simple et plus formelle comme dans le cas de l'équation de E. Lorenz comportant trois variables admettant une solution chaotique aussi imprévisible que le numéro gagnant d'une loterie. Cette solution se présente comme une orbite de trajectoires en spirales à deux côtés. Son observation sur un écran ne permet pas de prédire quand les passages successifs de la courbe d'un côté à l'autre auront lieu. On comprend alors qu'il s'agit d'une "dépendance sensitive des conditions initiales causée par des instabilités locales", située à un point 0 spatialement défini par l'attracteur de Lorenz et ses coordonnées. Le graphique suivant essaye de visualiser cette situation :



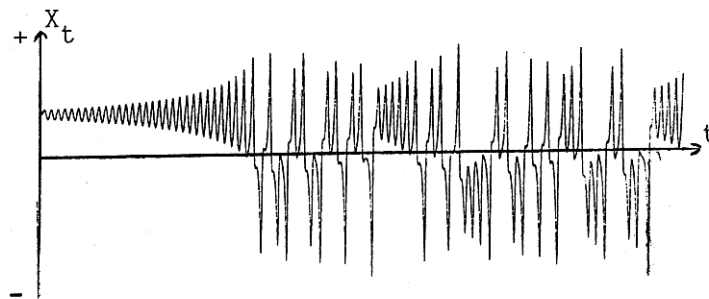
Dans ce graphique, les trajectoires sont représentées dans un espace, par phases de projection sur un plan de contrôle. Algébriquement, il s'agit d'un système dynamique à trois variables régi par un système de trois équations différentielles non linéaires de la forme :

$$d/dt X = a(Y - X)$$

$$d/dt Y = -XZ + cX - Y$$

$$d/dt Z = XY - bZ$$

La question est toujours de savoir quand a lieu le passage orbital et vice-versa ; autrement dit, y aura-t-il un passage de l'autre côté de l'orbite au niveau du point supérieur ou un retour en arrière ? Cette recherche conduit à reconstruire l'image de l'attracteur par les mesures d'un signal sur une coordonnée X à des instants successifs Q, t , ce qui fournit une suite de valeurs sur un vecteur pour un nombre n de composantes. Voici l'illustration d'une telle coordonnée pour l'attracteur de Lorenz :



Ce graphe montre que la variable X_t oscille "tantôt autour d'une valeur positive, tantôt autour d'une valeur négative, et ce, d'une manière tout à fait imprédictible". Les quantités mesurables supposent "un cadre défini et que les algorithmes soient valides sous l'hypothèse que le système est déterministe". Il s'agit donc d'une hypothèse logiciste de départ pouvant être confirmée par la mesure appliquée à des moyennes d'états observables du système durant un temps suffisamment long. Les enseignements que l'on peut tirer de cette projection formelle sont présentés comme suit : "la quantité d'information que l'on gagne sur la position et la vitesse initiale, par unité de temps". Plus précisément :

1) La dimension de l'attracteur ou dimension fractale "représente, en gros, le nombre nécessaire de coordonnées pour localiser un point de l'attracteur (algorithme de Procaccia, expérience de Raleigh-Bénard).

2) Partant de cet algorithme, l'entropie de Komogorov-Sinaï permet de formuler "la quantité d'information gagnée sur la condition initiale d'une orbite par unité de temps" ; "l'entropie est [alors] le nombre de bits d'information gagnés en allongeant l'observation d'une unité de temps".

3) "Les exposants de Lyapounov nous renseignent sur le taux moyen de séparation des orbites correspondant à des points initiaux proches les uns des autres".

Les études théoriques ultérieures ont mis en évidence une structure fractale des points de plus en plus fine; dans les tailles relatives des pièces de l'attracteur, indépendantes du système considéré à la limite du chaos". De tels systèmes ne sont donc "ni totalement réguliers ni totalement chaotiques". Ils sont devenus un

sujet de recherche intense et prometteur portant sur un schéma d'itération devenu une constante apparaissant "dans de nombreuses autres situations théoriques et expérimentales avec un caractère tout à fait universel noté $\approx 2,504...$) notamment en hydrodynamique

Conclusion : "C'est là un des exemples les plus spectaculaires de l'interaction entre travaux théoriques, compréhension mathématique et vérification expérimentale. Tous ces travaux ont mené à une nouvelle physique du chaos".

Évoquons encore l'ordinateur en tant qu'instrument incontournable de cette complémentarité complexologique caractérisé par sa puissance de traitement des types d'informations les plus divers. "L'ordinateur le plus puissant du monde" (Science et Vie, 1015, Avril 2002.: 106-111) est capable de traiter 40.000 milliards d'opérations par seconde avec une puissance de 40 téraflops. Cette machine gigantesque construite au Japon est baptisée, de manière significative, "Simulateur de la terre", ce qui pourrait être une forme de prédiction en ce qui concerne l'évolution de la science vers de nouvelles perspectives épistémologiques et philosophiques. Ainsi, le processus vectoriel employé dans cette machine est beaucoup plus puissant que le processus scalaire employé par IBM. Cette dualité est l'occasion d'une confrontation révélatrice de la complémentarité de leur impact sur le développement de connaissances toujours en voie d'être perfectionnées et reformulées en marge du conflit transcendantal entre hasard et déterminisme. De manière imagée, après Lorenz, on peut alors supputer les oscillations des ailes d'un papillon supposées avoir provoqué une perturbation du temps quelques jours plus tard à des milliers de kilomètres.

"Au niveau de l'ontologie, nous n'avons pas les moyens de résoudre ce conflit transcendantal. Au niveau épistémologique des rapports réalité-modèle, nous avons vu qu'à une réalité peuvent correspondre deux modèles, qu'on pouvait avoir le choix, et que même si nous pouvions être sûr qu'une réalité est déterministe, nous pouvions n'en percevoir qu'une manifestation aléatoire. Enfin, le recours conjoint à des schémas déterministes et à des schémas statistiques s'est avéré indispensable et fructueux" (Conclusion de D. Dalmedico, op. cit. 1992 : 405).

VI. 3. 3. Les catastrophes

Faisons retour à l'oeuvre de R. Thom concernant la théorie des catastrophes. Dans l'article "Mathématique et théorisation scientifique" (in R. Alperé et al., Penser les mathématiques, Paris, Seuil, 1982 : 252-273), l'auteur revient sur la relation paradoxale entre le local et le global et suggère qu'en mathématique, le paradoxe se transforme en une exigence de modélisation duale de nature métaphorique. "Si l'on veut qu'un modèle soit pragmatiquement efficace, alors, nécessairement, ce modèle contiendra une composante quantitative permettant la localisation spatio-temporelle des phénomènes qu'il décrit". Il doit être "défini par les êtres mathématiques analytiques sur un espace substrat lui-même analytique". Ce type d'espace représente "l'espace temps de la réalité quotidienne... perçu par nos sens... substrat ultime auquel tous les autres devraient pouvoir se réduire par des constructions mathématiques explicites". Il s'agit des "espaces substrats

abstrait" tels que les "espaces de fréquences statistique" dont l'évaluation et l'analyse sont approximatives.

La théorie du chaos élabore des modèles élémentaires ne conduisant à aucune prévision quantitative mais pouvant permettre une "prédiction qualitative" permettant de transformer un choix en une exigence de modélisation duale. "Si l'on peut réaliser tel ou tel chemin dans le déploiement U, on obtiendra telle ou telle transformation morphologique. La notion "d'analogie" joue un rôle heuristique fondamental" à cet égard. De tels modèles "chaotiques" ou "catastrophiques" géométrisés par analogie avec le langage ne sont-ils pas inutiles "par rapport à l'intuition immédiate liée au langage naturel, à la parole signifiante?" La réponse est qu'il s'agit d'un "problème de cas" qui nous ramène à un problème de choix possible ou impossible, impliquant notamment l'effacement de la sémantique et de ses incertitudes, ainsi que le "programme hilbertien d'élimination du sens". La géométrisation remplace "l'intuition sémantique, avec son caractère subjectif immédiat, par l'intuition géométrique qui spatialisait son objet et le distancie du sujet pensant". Les "schémas actantiels" permettent "une formalisation (relative) des situations syntaxiques des phrases élémentaires".

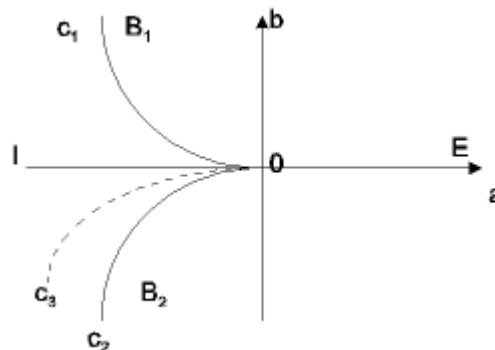
Plus précisément, il s'agit de convertir des modèles verbalisés en modèles causatifs, graphes et diagrammes fléchés indiquant des relations orientées, divergentes, convergentes, croisées, etc... entre signes de variables dans un espace temps géométrisé. Les variations sémantiques peuvent être ainsi dialectisées mais non pas contrôlées ; leur adaptation à des contextes différents peut être soumise à la loi causale ou à la logique du continu, mais leur signification en tant que métaphore et que catachrèse dans l'ordre des formes idéo figuratives reste incontournable qu'il s'agisse d'une interprétation de la systémique ou de l'analyse concrète localisée par une construction topologique permettant, en principe, de traduire des données pragmatiques et sémantiques en fonctions algébriques approximatives.

À cet égard, notons que la systémique intervient sous forme de métaphore du "modèle classique de la boîte noire", en fait, un système parmi d'autres dans lequel, face à une zone de composants inconnus (la boîte noire), on est réduit à produire des connaissances à partir de données entrant dans cette zone et de produits en sortant, en procédant à des modifications contrôlées des entrées se répercutant sur l'état ou la composition des sorties, la relation étant mesurée. Cependant, l'effet de rétroaction du processus n'est pas toujours applicable en matière de catastrophe. Le processus d'évaluation est alors constitué par une inférence ou une extrapolation à partir de correspondances jugées significatives entre une cause et un effet supposés repérables par leur défilé dans le temps. L'auteur précise d'ailleurs "que, pour une classe très vaste de systèmes, il devrait y avoir un théorème qui établisse que, pour la plupart des choix de l'histoire des entrées, le nuage de points [représentant le rapport entrées-sorties dans un espace vectoriel] tend vers une distribution unique et bien définie de probabilité". Les limites d'une telle opération sont précisées comme suit : "Selon moi, on ne peut jamais "dédire" un phénomène concret d'un théorème... Cela : n'est permis que si, à priori, on est en présence d'un phénomène régi par un certain modèle (Thom, *ocit.* 1983 : 60,101). C'est alors que pourraient intervenir le principe de commodité de Poincaré et une utilisation des formes idéo figuratives dans l'interprétation et la modélisation du continu et des possibles échelonnés.

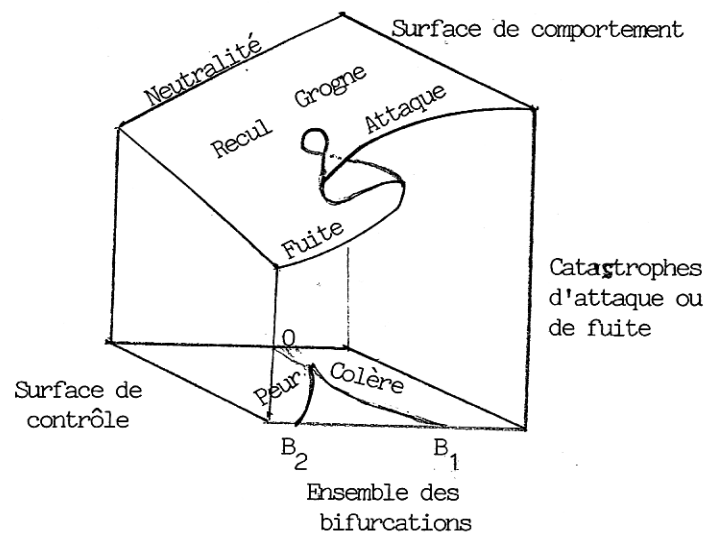
Avec la probabilité, la topologie est une "porte de sortie de cette situation de boîte noire relevant de l'extériorité obscure" : c'est la régularité qu'il convient d'établir non sans risque d'erreur! Toute situation instable est source d'indétermination ; mais nous, nous voulons paramétriser toutes les "actualisations" possibles des virtualités contenues dans une situation instable que nous représentons mathématiquement avec une singularité". Le modèle utilisé est celui des équations différentielles. Sept catastrophes élémentaires sont ainsi mathématisées par des fonctions et représentées jusqu'à cinq dimensions sur des surfaces complexes dont les noms évoquent des objets connus associés à un potentiel algébrique : le pli, la fronce, la queue d'aronde, l'ombilic hyperbolique, l'ombilic elliptique, le papillon, l'ombilic parabolique (le champignon). (I. Ekeland, *La théorie des catastrophes*, La Recherche, 81, Sept. 1977 :745-sq).

La singularité représente un chemin particulier dans un espace des paramètres de contrôle. Par exemple, dans le graphique ci-dessous (R. Thom, op.cit. 1983 : 71), la géométrisation se situe dans un plan de contrôle (a,b) où s'inscrit une courbe-parabole semi-cubique (B_1, B_2) d'équation $4a^3 + 27b^2 = 0$.

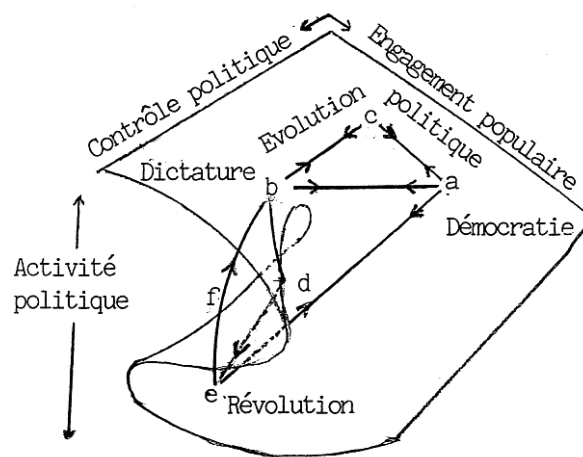
Dans ce plan partagé en cinq parties, I désigne l'intérieur de la courbe et E l'extérieur. Si (a,b) est en E, une seule racine réelle minimale est possible et la boîte noire ne peut avoir qu'un seul régime. En I, trois racines de l'équation sont possibles avec pour origine 0: les extrêmes c_1 et c_2 représentent deux régimes divergents en conflit, et c_3 indique les points de catastrophes.



Cette modélisation a été concrétisée par des auteurs en utilisant le schéma de la "fronce". E.C. Zeeman (*Catastrophe Theory*, Scientific American, 234-4, April 1976 : 66) prend pour exemple l'agressivité d'un chien partagé entre la peur et la colère, pouvant passer de la neutralité (0) à l'attaque (B_1) ou à la fuite (B_2) constituant deux catastrophes repérables sur l'espace de contrôle. Les indices permettant de probabiliser le comportement sont le grognement hostile conduisant à l'attaque et l'aplatissement des oreilles sur la nuque annonçant la fuite. Ces données empiriques relevées cas par cas sont portées sur une fronce ou surface de comportement et projetées sur un plan ou surface de contrôle. En voici une esquisse :



D'après Zeeman, ce modèle peut servir à représenter certains comportements humains notamment dans le cas des discussions paisibles qui dégénèrent quand la colère et la peur augmentent ; le comportement bimodal se manifeste alors par une bifurcation sur la surface plissée : c'est le moment des affirmations fortes ou des concessions. L'émotion allant croissant, on atteint des alternatives plus tragiques entre l'invective et l'excuse conduisant à la colère et à la peur. Le même modèle est présenté pour illustrer l'évolution et la révolution politiques (A.Woodcock, M. Davis, Catastrophe Theory. A Revolutionary New Way of Understanding How Things Change, Pelikan Books, 1980, Chap.7). La surface de comportement est représentée comme suit:



Interprétation : un contrôle politique centralisé non oppressif n'entraîne pas de soulèvement politique (c-a); s'il s'accroît, il conduit à une dictature personnelle (c-b) ou à une "dictature du prolétariat" (a-e). Si le pouvoir central est élevé, une croissance ou une décroissance de l'engagement populaire peut conduire à une révolution (b-d-e ou e-f-b), une contre-révolution peut ramener une dictature (b-a-c-f). Le même schéma représente l'ordre et le désordre d'une société en cas de danger, les changements de statut social régulier ou brutal, les

effets de la compétition et de l'élasticité de la demande sur les prix, les changements graduels et dramatiques d'une inflation, les conflits de groupes de pression : écologie contre pouvoir nucléaire, l'émergence d'un compromis.

* * *

Des critiques concernant la mathématisation de phénomènes relevant des sciences humaines, provenant essentiellement de mathématiciens appliqués, sont commentés par R. Thom (op.cit. 1982 : 252 sq). "Il n'y a guère de doute que la critique portant sur l'inefficacité pragmatique des modèles de la théorie des catastrophes ne soit, pour l'essentiel, fondée. Mais il ne faut pas s'attendre à voir cette critique se développer beaucoup, parce que, si on la poursuivait, elle aboutirait à remettre en cause une bonne part de la production scientifique contemporaine... A partir des situations pures de la physique fondamentale, où les grandes lois constitutives s'appliquent et sont seules à s'appliquer, on ne tarde pas à rencontrer des situations mixtes où ces lois sont présentes, mais ne suffisent plus à déterminer entièrement l'évolution temporelle du système; il faut y ajouter des hypothèses ad hoc, en général tirées de considérations statistiques et de lois empiriques dont on utilise une expression approchée".

Ces opinions appellent des éclaircissements et, peut-être, des argumentations fondées sur des bases langagières plus développées.

Les trois graphiques précédents montrent de manière frappante le contraste existant entre les trois situations qualitativement trop différentes pour être formalisées suivant un modèle identique. Cette différence résulte des niveaux de complexité dont la variété ne peut être ignorée.

1) Le modèle théorique définit un espace mathématique dans une perspective algébrique en vue de traiter des systèmes d'équations définies sur une surface où sont représentées les bifurcations possibles dans une courbe parabole semi-cubique.

2) Le second graphique applique ce modèle, de manière plus descriptive qu'explicative, à des suites d'observations portant sur le comportement schématisé d'un chien hypothétique. La modélisation est alors réalisable par projection des motifs et des attitudes jugés empiriquement significatifs sur un plan de contrôle où s'inscrivent les bifurcations possibles.

3) La troisième catastrophe impliquant des comportements et des organisations dans un cadre évolutif, n'est représentée que par des graphes causatifs sur une surface en fronce. Les termes sélectionnés sont transformés en variables convergentes ou divergentes : démocratie, dictature, révolution, en fonction de deux processus opposés (autorité et intervention populaire) ; le tout est géométrisé par des flèches à double sens marquant l'instabilité du système et la multiplicité des bifurcations impliquées. L'information apportée reste globale et générale bien que pouvant s'appliquer aussi bien au bolchevisme qu'au nazisme.

Il est aisé de repérer la déficience complexologique résultant de la comparaison entre ces trois catastrophismes. Le modèle formalisé est mathématiquement fondé ; il constitue incontestablement un

instrument d'analyse des bifurcations contrôlables et évaluables dans des limites qu'il incite à préciser. Dans ces limites, le modèle du chien permet d'illustrer une telle analyse dans la mesure où il traite un thème simplifié par son motif canin et par l'ordre temporel des séquences aboutissant à une forme de catastrophe par attaque ou fuite. Il s'agit, dans ce cas, d'une interprétation visuelle impliquant des définitions et des relations réductibles à une projection contrôlable. Le modèle politique est différent en raison de la complexité qualitative de la situation représentée uniquement par le schéma fléché sur la surface de comportement, de plus complexifié par les divers choix possibles et les variables interactives hors du temps.

Un tel décalage entre les trois exemples de théorisation catastrophique peut être perçu comme un échec dans une perspective scientifique de type positiviste ou physicienne classique. Dans une perspective logologique, la théorie des catastrophes est interprétée comme un type de modélisation dans lequel la mathématique devient créatrice d'objets d'étude par interprétation et projection conceptuelle de calculs, au même titre que la théorie du chaos ou que la mécanique quantique.

La particularité des catastrophes est de montrer la généralité de ce problème épistémologique posé par l'utilisation de formes linguistiques différentes car spécialisées, ce qui suscite une réflexion sur le logos, une logologie. Les choix de langage d'investigation et les contraintes qui en résultent pour la connaissance, mettent en évidence une opposition entre la formalisation réductrice et le sens interprétable pouvant exprimer, entre autre, la dualité continu-discontinu. Dans les graphiques de catastrophes, la confrontation des langages apparaît nettement : le premier concerne une forme localisée excluant le sens et la sémantique ; le second expose des données pouvant satisfaire cette forme par interprétation et arrangement ; le troisième introduit des scénarios significatifs dans la surface de comportement : la forme est alors sacrifiée au fond pour tenir compte de faits historiques irréductibles en extension. Il apparaît que le problème des sciences humaines qui concernent ceux qui les développent et en sont l'objet, s'insère dans la globalisation à son niveau le plus complexe et le plus diversifié où culmine l'image de la "boîte noire". L'utilisation des approches probabilistes, de la systémique, des graphes, permet d'expliquer approximativement des données empiriques déjà conceptualisées et dépendantes de contextes divers. Il peut s'agir alors de champs sémantiques, de formes idéo-figuratives par connexion et inférence théorique, scénique. ou idéale., ou de temporalités enchevêtrées : passé-présent-futur, constantes-régulations-catastrophes, enjeux-paris-stratégies-produits... Les résultats de telles recherches relèvent d'un type d'indécidabilité rappelant Gödel et concernant la 'vraie logique.'" mathématiquement indémontrable, sauf que la divergence entre intension et extension est plus complexe. plus exigeante en matière de théorie- d'hypothèses ou de postulats.

Ch. VII. Linguistique- socio cinétique: causalité, finalité, action, chrono diversité

L'analyse formelle appliquée à la compréhension des relations et des organisations sociales, peut certes représenter une activité marginale et peu fiable pour les mathématiciens classiques ; dans une perspective logologique, elle constitue la manifestation significative d'une modélisation conceptuelle n'excluant pas des formes quantitatives adaptées à la nature des données étudiées comme dans le cas des statistiques ou des graphiques. Un ordre globalisant doit alors être défini théoriquement suivant des processus pouvant être définis comme suit : repérage séquentiel des données - grammaticalisation cognitive - construction actualisée cohérente ; ce que l'on peut également énoncer sous forme d'une relation conventionnelle: objet temporel - signes ou indicateurs contextuels ou hors-contexte - significations interprétatives - abstraction - critique. (C. Roig, La théorie générale des systèmes et ses perspectives de développement dans les sciences sociales, Revue Française de Sociologie, 1970-71 :47-97 ; Réflexions sur les propriétés structurelles du discours idéologique, Analyse de l'Idéologie, Centre d'Etude de la Pensée Politique, Paris, Galilée, 1980 : 41-64 ; Probabilité, signification et connaissance sociopolitique, L'Année Sociologique, 1988, 38 : 235-273 ; Rhétorique et analyse sociopolitique, Connaissance du Politique, G. Duprat Ed., Paris, PUF, 1990 : 97-133 ; Argumentation, rhétorique et politique, L'Année Sociologique, 1994, 44 : 209-241).

Autres formulations de cette problématique. Les réflexions suivantes de H. Poincaré dans Science et Méthode (op.cit. : 90,92) concernent les "sciences morales et l'histoire" dont le processus cognitif fluctue entre le hasard et l'explication. "Le plus grand hasard est la naissance d'un grand homme" affaire de rapport sexuel et de circonstances. Tel n'est pas le cas "quand les hommes sont rapprochés, ils ne se décident plus au hasard et indépendamment les uns des autres ; ils réagissent les uns sur les autres. Des causes multiples entrent en

action, elles troublent les hommes, les entraînent à droite ou à gauche, mais il y a une chose qu'elles ne peuvent détruire, ce sont leurs habitudes de moutons de Panurge. Et c'est cela qui se conserve". Ce jugement expéditif met l'accent sur plusieurs aspects importants des relations humaines : la notion de "grand homme" attire l'attention sur l'aspect "catastrophique" des temporalités historiques mais aussi sur l'aspect "quantique" des comportements dans les sociétés hiérarchisées, les vacillations imprévisibles ne peuvent cependant porter atteinte à une constante bizarre réduite au comportement moutonnier. S'agit-il d'un phénomène lié à l'espèce, à la solidarité, à la pression sociale, à la peur ?

La question reste entière et on peut aller jusqu'à penser qu'il est nécessaire de réaliser une composition entre "l'abondance du savoir et l'infinité de l'ignorance" (T. Adorno K. Popper, De Vienne à Francfort. La querelle allemande des sciences sociales (Trad.) Bruxelles, Complexe, 1979 : 91). Le réductionnisme devient alors conceptuel, il traduit une transformation risquée de données en informations interprétables théoriquement, pouvant exclure mais aussi exagérer les définitions en extension fondées sur des mesures et des formules, par exemple, en science économique. La valeur de l'explication peut être projective mais non pas prédictive; elle ne résulte pas de tests expérimentaux, mais d'une crédibilité relevant autant de choix topiques que de confirmations historiques à temporalité variables. Au mieux, la connaissance peut alors se fonder sur des probabilités subjectives attachées à des phénomènes du passé et à leurs rapports possibles avec le présent et le futur. Le "criticisme" de K. Popper (op.cit. 1979 : 78) définit cette situation par rapport au naturalisme scientifique. "La tension entre savoir et non-savoir conduit à des problèmes et à des essais de solution. Mais cette tension n'est jamais dépassée. Car il apparaît que notre savoir ne consiste jamais qu'en des suggestions provisoires de solution. Il implique donc principalement la possibilité de se révéler plus tard avoir été une erreur, et donc une ignorance... On ne peut démontrer le caractère probable de nos essais de solution (au sens du calcul des probabilités)". Peut-être convient-il de rappeler qu'une tension épistémique est à même de suggérer une approche dialectique enrichissante, et que, dans ce cas, une erreur n'est pas nécessairement une ignorance mais une étape vers une connaissance toujours située à l'horizon, hypothèse ou possibilité.

Fonctionnalisme systémique, interactionnisme relativiste, conventionnalisme pragmatique, institutionnalisme juridique, constantes et ruptures politiques : autant de perspectives localisées, diversifiées mais complémentaires dans une vision interdisciplinaire à construire dans le cadre des relations constitutives de l'interface langagière où se situe la modélisation socio cinétique en tant qu'organisation grammaticale cognitive cohérente dans ses références et cohésive dans ses interprétations théoriques, impliquant une topique actantielle sous forme de scénario évolutif, une formalisation complexologique diversifiée, des applications factuelles et des questionnements théoriques.

VII. 1. Les topiques actantielles

Les topiques ont été présentées comme des formes essentielles de la modélisation figurative (Supra 1L1.2)., Elles sont à la base d'une problématique fondée sur des termes de base, topos, lieux communs, concepts fondateurs, définissant des catégories générales ou substances permettant de répertorier et de

positionner les significations, les arguments, les liaisons impliqués dans une analyse.

On sait depuis Aristote (Organon V, Topiques (trad. Tricot), Paris, Vrin, 1974 I, 9) que les topiques s'appliquent à la compréhension des acteurs et de leurs actions grâce notamment à une catégorisation fondamentale des prédicables (définitions, propres, genres, accidents) qui orientent la dialectique, l'induction, le raisonnement concernant la signification d'assertions telles que "essence, quantité, qualité, relation, lieu, temps, position, possession, action, passion". La règle est que toutes les références et perspectives correspondant à un terme doivent être envisagées pour décider de la validité d'une thèse ou de l'existence d'une ou plusieurs significations éventuellement dialectisées. Le rapport entre homme et action symbolique implique en outre des dérivations grammaticales ou autres des topos ouvrant la voie à des transferts de sens au niveau des mots ou des textes. Ainsi les topiques permettent la construction de modèles à partir d'inférences idéelles figuratives.

Une telle ouverture langagière est particulièrement utile et suggestive pour la compréhension des phénomènes sociaux impliquant l'homme, son environnement spatio-temporel, ses motifs, ses actions, son langage. Elle trouve une expression et un accomplissement littéraires dans les spectacles et notamment dans le théâtre qui a pu apparaître comme un "genre" conférant un sens dramatique unificateur à la conceptualisation de situations complexes relevant d'expériences et de discours présentés dans des scénarios et autres "mises en scène". La règle de l'unité d'action, de temps et de lieu a pu constituer un modèle dans le théâtre classique; elle fut ensuite élargie dans le style romantique (poétique, romanesque).

La transition vers la méthodologie linguistique nous est offerte par K. Burke (Grammar, 1969 341) qui reprend cette modélisation de l'action dans une perspective qu'il qualifie de "dramatique" et qu'il applique à l'étude de "la dialectique des constitutions" à partir de cinq termes considérés comme des "commencements" et des "moteurs primaires" d'une grammaire pentadique définie référentiellement comme suit.. "Une constitution légale est un acte ou un corps d'actes ou de dispositions fait par des agents (tels que les législateurs, magistrats ou autres personnalités représentatives, destiné (but) à servir de base de motivation pour les actions ultérieures (scène) constituant ainsi un instrument pour donner forme aux relations humaines". Cette grammaire peut recevoir plusieurs interprétations complémentaires dans une perspective analytique. L'une d'elles consiste à mettre l'accent sur le positionnement initial des actions humaines ; l'autre envisage le recouvrement déterminant de ces formes par l'une d'entre elles la troisième traite logiquement les séquences significatives, répétitives ou novatrices de ces formes, pouvant être représentées par règles, formules, graphes, jeux de stratégie.

Les formes initiales sont traitées comme des motifs d'intellection fondés sur le rapport entre logos et topos que l'on peut traduire et compléter comme suit : Scène (S), Décideur (D), Action (A), Instrument (I), Finalité (F), Résultat (R). Autant de ressources topiques qui sont utilisées dans les énoncés métaphysiques et fictifs, politiques et juridiques, poétiques et scientifiques, journalistiques et potiniers, dès lors qu'ils sont faits dans des situations spatio-temporelles représentées par des lieux linguistiques déterminés. Les ambiguïtés des langages sont alors traitées comme des signaux de transformation de l'interprétation dont elles constituent des ouvertures épistémiques, comportant certes des incertitudes et des risques mais aussi des repères intuitifs et novateurs entre : donné et construit, information et signification, idée et théorie.

La topique actantielle se fonde sur les définitions suivantes.

La scène (S) symbolise l'espace-temps dans l'univers des langages, en intension et en extension. Son expression philosophique est le matérialisme mais aussi le positivisme et l'empirisme. Le scientisme et les conceptions scientifiques du monde en constituent les formulations actuellement les plus répandues.

Le décideur (D) désigne tout acteur individuel et/ou collectif agissant dans une situation donnée, faisant intervenir des motifs, des aspirations projectives ou imaginaires. Sa caractéristique philosophique est l'idéalisme.

L'action (A) est l'expression d'un volontarisme pragmatique. Elle est à la fois une manifestation du sujet, une cause de motion intentionnelle et un facteur de changement matériel. Elle peut relever de la foi, de la norme, de l'information ou du pari. Et elle peut traduire la nécessité, la compétence, la conscience, l'agressivité... ou leur contraire.

L'instrument (I) se réfère aux moyens employés par le décideur pour accomplir et réussir son action, il relève à cet égard de la pragmatique. Il se matérialise dans des outils matériels (machines) ou intellectuels (discours) ; il peut apparaître comme une limite à l'action envisagée et comme un repère du possible. A signaler l'importance des moyens de communication (de l'écriture à Internet) dans la formation et l'évolution des relations humaines.

La finalité (F) se concrétise dans un projet fondé sur une conjecture. Sur le plan matériel, elle réalise une connexion entre la finalité, l'instrument et la scène. Sur le plan symbolique, elle se situe dans une perspective transcendante. Il y a du mysticisme dans les croyances et les idéologies, mais aussi dans la sacralisation de la monnaie et dans la mathématique non-standard.

Le résultat (R) concerne les effets de l'action dans la scène et les jugements portés sur ces effets par le décideur, les participants et les analystes.

A ces définitions, il convient d'ajouter les ratios entre les différents topoï lesquels rendent possibles des inférences idéelles constituées par des recouvrements de sens en vue de faire prévaloir symboliquement l'un d'entre eux sur les autres dans la topique actantielle.

La scénisation est l'extension de sens où se situent les causalités avec leurs incertitudes et leurs limites variables dans l'espace-temps. La succession des temporalités et les analogies circonstanciées sont alors déterminantes pour la définition des constantes et des ruptures dans le scénario.

La personnification vise le statut du décideur dans un système qu'il convient d'interpréter d'après Burke "comme favorisant ou comme sélectionnant certaines catégories de personnes avec leurs actions appropriées plutôt que d'autres".

L'actisation est alors la condition et le produit temporel de l'action personnelle. Elle se traduit par des choix et des décisions, par des actes symboliques ou matériels, créant des relations et des hiérarchies dans une

société donnée. Un des facteurs d'efficacité de l'actisation repose sur les différentes formes que peut revêtir la prophétie auto-réalisatrice dans un ordre théologique, politique ou scientifique.

L'instrumentalisation accompagne et permet les précédentes extensions de sens. La science, les techniques, la production, la puissance militaire, les institutions sont autant d'activités et de capacités concernées par les recouvrements topiques. Il convient de tenir compte également des rapports sociaux inégaux pouvant aller jusqu'à réduire des humains à l'état d'instruments (esclavage, travail forcé, mobilisation, emprisonnement).

La finalisation est la justification idéale du décideur, elle fait appel à la raison qui consacre son éventuelle réussite présente, et à la légitimité qui lui confère un droit d'agir dans le futur pour traiter des problèmes ou fixer des buts. L'opposition est une négation de la finalisation des comportements humains impliquant des motivations nouvelles conflictuelles ou dialectiques.

La résultante s'applique aux résultats obtenus à un moment donné par rapport à une situation antérieure de référence. Elle met en rapport à différents points de vue les produits, les coûts et les buts pour conclure positivement ($R > 0$) à la réussite ou négativement ($R < 0$) à l'échec ou bien sans conclusion ($R = 0$).

Le recouvrement des formes est à la base d'une dynamique scénique esquissée par K. Burke dans le texte précité à propos de l'élaboration des constitutions et théorisée par les logiques des normes. Concernant par exemple le rapport entre proposition et norme, signalons les définitions suivantes qui élargissent le champ de la tiercité de Peirce (G. Kalinowski, La logique des normes, Paris, PUF, Sup, 1972 : 16 sq, 102 sq). Dans l'expression "la vallée de Chevreuse est située au sud ouest de Paris", une distinction est faite entre la "structure syntaxique" de l'énoncé (le signe), le jugement impliqué par cette expression (l'interprétant), "moyen, entre autre, de la communiquer aux autres" et la "réalité" ou "état de chose" que cette expression désigne (l'objet). A cet égard, "il importe de rappeler que le terme "jugement" a deux significations : l'une psychologique, l'autre logique". Cette dernière désigne l'intention qui devient source d'interprétants fondés sur des légisignes, symboles ou arguments, selon Peirce Supra. La topique est aussi dynamisée par "la relation entre un sujet d'action (agent) ou un ensemble de sujets d'action et une action ou un ensemble d'actions..."

La notion de norme [est limitée] aux seules règles de comportement, mais... aussi, par métonymie, le nom de "norme" [est appliqué] aux énoncés qui les signifient". Globalement, ces définitions impliquent la prise en considération de la finalité et des instruments intervenant dans ce type de relation situé dans une scène qui la rend possible et qui conditionne "l'accomplissement" ou le "non accomplissement" (le résultat) de l'opération légale ou non légale (permise ou interdite, libre ou obligatoire).

Cette perspective est précisée et développée par G.H. Von Wright (Practical Reason, Oxford, Basil Blackwell, 1983 : 35 sq) étudiant le "déterminisme et l'étude de l'homme", une forme de causalité qui a différentes origines dans "l'action intentionnelle" conditionnée par une finalité reposant sur des constituants ou motifs subjectifs ou objectifs, internes ou externes ; ces derniers étant des "réponses à des défis verbaux ou symboliques sources de participations à des formes variées de comportements "institutionnalisés" ou

"pratiques". Que ces pratiques soient institutionnalisées, cela signifie "qu'elles sont partagées par une communauté dans laquelle nous sommes élevés en étant éduqués pour participer". La socialisation par apprentissage (partagée avec de nombreuses sociétés animales) apparaît donc comme l'activation d'une "intelligence sociale" par récompenses et sanctions. D'une manière plus générale, le produit de ce processus est l'objet d'une "histoire scientifique", "d'une enquête sur la logique des événements dans une séquence du passé comportant des acteurs et des institutions nommées,... une étude de l'histoire d'un point de vue déterministe pour autant qu'elle concerne l'interaction entre les changements historiques et les déterminants de l'action humaine... Ainsi, les actions des hommes sont déterminées par leur situation historique, mais cette situation est elle-même le produit des actions des hommes. Il n'y a pas de circularité d'une nature logique vicieuse dans ce fait que l'espèce humaine est à la fois esclave et maître de sa propre destinée"

Ces considérations épistémologiques et philosophiques, sorte de formulation chaotique de la connaissance dans un monde évolutif et incertain mais conscient et connaissable, ne sauraient être ignorées par une linguistique sociocinétique toujours perfectible.

VII. 2. Les formalisations complexologiques

La construction des modèles sociocinétiques est fondée sur leur représentativité supposée de processus sociaux complexes et changeants relevant d'une chronodiversité.

Concernant les enjeux épistémologiques de la modélisation systémique, retenons les définitions de J.L. Le Moigne données dans une approche constructiviste (Formalises of Systemic Modelling, in H. Greppin (Ed.) Some Physiochemical and Mathematical Tools for Understanding Living Systems, Université de Genève 1993: 3-22). S'agissant d'éviter les effets du formalisme réducteur, l'auteur propose un retour aux "paradigmes nominalistes et dialectiques". Trois hypothèses servent de base à ce pari épistémologique constitué par trois grandes options. Premièrement, l'hypothèse "phénoménologique" que l'on interprète comme un effacement du critère réconfortant de la vérité objective appliqué à une représentation qui concerne une chose perçue dans son environnement par un observateur qui interprète subjectivement. Deuxièmement, l'hypothèse "téléologique" introduit le projet de l'observateur qui superpose à l'action une cause finale à travers laquelle l'expérience peut être conçue. Une application en est la cybernétique avec les concepts de boîte noire, de feedback et du rapport intrant-extrant se référant à la téléologie. Troisièmement, l'hypothèse de "rationalité procédurale" se définit par opposition à l'hypothèse positiviste d'une logique déductive naturelle ou substantive. La validité des conclusions repose alors sur les croyances de l'acteur, sa maîtrise du raisonnement (réflexion, récurrence, spéculation, auto-référence), son expérience par essai et erreur, cause et effet, interprétation et dialectique. Le sens est ainsi privilégié par rapport à la forme, il est construit dans une "systémographie".

Une systémique sociocinétique ne peut que s'inspirer de cette conception constructive en ce qui concerne les interférences entre continu et discontinu, idée et action, liaisons et bifurcations ou ruptures, mais aussi régularité, répétition ou mutation, saillance, exception qui nous inspirent une approche probabiliste fondée

subjectivement ou objectivement.

Certes, les études reposant sur des données statistiques supposent d'une manière générale trois conditions de fiabilité : la représentativité du panel, la précision du fait ou de l'événement étudié, un ordre séquentiel permettant une temporisation significative du résultat. Ces conditions ne sauraient être remplies dans le cas de situations historiques trop complexes pour être ainsi maîtrisées. Restent les simulations et les interprétations d'informations quantifiées rendues significatives et perfectibles (R. Boudon, L'analyse mathématique des faits sociaux, Paris, Plon, 1967).

James Coleman (The Mathematics of Collective Action, London, Heinemann, 1993) interprète dans ce sens les chaînes de Markov. Les précisions suivantes sont à retenir dans une perspective développementale de compréhension en extension et en intensification. La mathématique des relations sociales a pour objet deux types de phénomènes lorsqu'on se place au niveau de l'individu. "Ordinairement l'homme est une personne qui réagit à son environnement dans la poursuite de quelque but". La description de cette situation exige que l'on sépare deux perspectives : "le comportement de l'homme en tant que réponse à l'environnement" et "son comportement en tant que poursuite d'un but". La première est une scénarisation privilégiant "le processus causal et déterminant du comportement, utilisant souvent une trame explicative mécaniste qui emploie les concepts de "forces" et "d'action résultante". La seconde privilégie une finalisation de l'action humaine en tant que dirigée vers un but : "moins concentrée sur les conditions environnementales actuelles que sur les états futurs désirés". Les deux approches ont leur fondement dans la théorie psychologique (l'homme économique rationnel) où elles sont définies comme "stimulus-réponse" et comme "action intentionnelle".

La théorie des graphes permet de représenter les relations humaines à partir d'un système de réseaux de communication schématisant les propriétés structurales, fonctionnelles ou sociométriques des sociétés et des groupes. Il s'agit de propriétés repérables temporellement, non quantifiables pour l'essentiel, interprétables par compréhension, fondées sur la cohérence référentielle et la cohésion réflexive. De ce fait, une telle approche nécessite des concepts aussi précis que possible, des relations sûres entre ces concepts, la définition d'algorithmes systémiques pouvant être identifiés dans le graphe par des relations d'ordre fixées : orientation et dessin des flèches, points valorisés, arborescences, complétude, multigraphie, etc... (C. Flament, Réseaux de communication et structures de groupe, Paris, Dunod, 1965 ; A. Kaufmann, Des points et des flèches... la théorie des graphes, Paris, Dunod, 1968).

L'interprétation des graphes peut être complétée par la théorie des jeux de stratégies à somme nulle ou à somme variable. Dans les premiers, les résultats envisageables sont opposés, la somme des gains et des pertes est égale à zéro. Dans les seconds, les intérêts des joueurs sont conciliables et incitent à passer d'une information partagée à une règle acceptée. Ces dynamiques possibles caractérisent autant le sport de compétition que la politique, le commerce que la guerre (T. Guilbaud, Eléments de la théorie mathématique des jeux, Paris, Dunod, 1968).

Il est remarquable que la recherche en Intelligence Artificielle conduise à une représentation topique de la "structure de la connaissance humaine à partir de la solution du problème de l'informatisation du sens des

phrases, laquelle implique l'élaboration d'une grammaire permettant de programmer des pensées et des motifs indépendamment des règles du langage Commun et notamment de la sémantique". Cette programmation doit en effet être la même pour deux phrases ayant le même sens, elle doit aussi mentionner une information implicite dans une phrase ordinaire. D'où la recherche de concepts adaptés à de telles exigences, et une conceptualisation active de la forme: Acteur, Action, Objet, Direction (Instrument) ; et une conceptualisation passive explicite : Objet (en) Etat (avec valeur). Ces termes maîtres sont remarquablement proches des motifs de K. Burke et ils constituent en l'occurrence la base de la définition d'actions primitives reliées dans des chaînes causales représentant des flux d'événements. Des scénarios (Scripts) reconstituent cette base dans le cas d'histoires racontées par des locuteurs dans un contexte particulier et concernant des activités répétitives programmables à partir des analyses individuelles (par exemple, manger dans un restaurant, jouer ou regarder un match de football...) mais aussi des actions plus complexes concernant des phénomènes sociaux, politiques, économiques, perçus globalement et qu'il convient de conceptualiser par des modèles causatifs. De tels scénarios exigent des plans concernant "l'information générale sur la façon dont les acteurs réalisent leurs buts quand des événements initiaux provoquent une raison d'agir chez un individu qui décide une ou plusieurs actions pouvant déclencher des chaînes de résultats et de possibilités". De tels plans peuvent être codés en séquences à partir des concepts-clés, par exemple:

"But-FinalitéCroyance" → "Buts secondaires" → "Réalisations potentielles".

Les "thèmes de rôles" à des occupations ou des fonctions (psychiatre, président...) créent des attentes à propos de buts et d'actions dans un contexte. Les thèmes "interpersonnels" se construisent sur des relations (amour, famille). Les thèmes "vitaux" expriment des aspirations personnelles à la base de buts toujours renouvelés (richesse, pouvoir).

De tels plans permettent d'établir des relations formelles perfectibles entre la modélisation sociocinétique et les algorithmes informatiques :

Le code "Cause → Action → Réalisation", se compare à un rapport de Scénisation : "Scène → Décideur → Instrument → Action → Résultat..."

Le code "But-Finalité-Croyance → Pouvoir → Conséquence" peut se comprendre comme une Finalisation :

"Finalité → Décideur → Scène → Action → Instrument → Action → Résultat..."

Ces relations peuvent être précisées à partir d'inférences fondées sur des applications à des phénomènes historiques dont les bases sont très différentes (R.C. Schank, Causality and reasoning, Working papers, Fondazione Dalle Molle, Castagnola, Suisse, 1973 ; R.C. Schank, R.P. Abelson, Scripts Plans Goals and Understanding, Hillsdale N.J., LEA, 1977 ; H. Wold, Model Construction and Evaluation when Theoretical Knowledge is Scarce, Univ. de Genève, Dép. Econométrie, 1979 ; G. Lakoff, M. Johnson, The metaphorical Structure of the Human Conceptual System, Cognitive Science, 4, 1980).

VII. 3. Applications logo logiques : deux illustrations

VII.3.1. Les constitutions françaises

Le rapport de synthèse de G. Vedel sur La continuité constitutionnelle en France de 1789 à 1989 (Paris, Economica, 1990 : 171 sq) offre une remarquable ouverture épistémique aux théorétiques actantielles pouvant être déterminées par des choix de perspectives différentes pour l'étude de l'histoire constitutionnelle française. C'est ainsi que considérer les "principes" comme objet d'étude conduit à mettre l'accent sur la continuité des expressions littérales et d'une formulation juridique. En revanche, comme le propose l'auteur, étudier les applications et leurs variations "matérielles", "mécaniques" conduit à privilégier la discontinuité historique du processus constitutionnel. "Donc l'idée de continuité trouvait plus facilement un point d'application dans l'examen des principes que dans celui des incarnations successives auxquelles ils avaient pu donner lieu."

Retenons l'interprétation suivante : Étant donné "la place qu'a tenue dans notre histoire constitutionnelle le débat Monarchie-République-Empire, c'est-à-dire finalement une controverse assez pointue sur la forme de gouvernement, alors que la véritable recherche sous-jacente était celle d'une panoplie de valeurs communes, on constate qu'il a fallu plus de soixante-quinze ans aux Français pour, qu'au rendez-vous de la IIIe République,

1°) ils s'aperçoivent que la grande querelle... n'a pas beaucoup de sens ;

2°) ils finissent, ayant déchiré le voile des régimes, par être d'accord sur l'essentiel... " Il convient d'ajouter "qu'à l'intérieur même de la règle de droit, l'analyse juridique est mutilée" par des interprétations et des utilisations différentes qui prennent de ce fait "valeur" constitutionnelle (circonstances exceptionnelles, état de guerre, décrets-lois).

Conclusion de G. Vedel : "la continuité constitutionnelle est acceptable à condition d'y ajouter des "oui... mais": interrogation ou points de suspension, à défaut du "point d'ironie" qui suggère cependant les idées de paradoxe et de dialectique.

On peut donc induire qu'une modélisation actantielle permettrait de représenter de manière systémique et causale les constantes, ruptures, adaptations, interférant dans le processus historique complexe sous-jacent à l'élaboration des constitutions françaises depuis deux siècles.

Dans une première étape, six lieux de conceptualisation peuvent être définis: les finalités ($F_{1'2'3'}$) représentant trois principes légitimants : la monarchie (tradition, religion), la république (héritage de la Révolution), l'empire (autorité, puissance) ; ces principes sont incarnés par des décideurs légitimes ($D_{1'2'3'}$) en compétition et disposant d'instruments idéologiques et matériels ($I_{1,2,3}$) pour mettre fin dans une scène politique

(S) à une situation de crise ou d'instabilité par une action appropriée(A_{1'2'3'}) dont l'aboutissement a pour résultat (R) la réussite de l'un des protagonistes.

D'où le schéma globalisant :

$$F_{1'2'3'} [(D_{1'2'3'}) (I_{1'2'3'}) (A_{1'2'3'})] \rightarrow R [(F_1 D_1 \vee F_2 D_2 \vee F_3 D_3) S]$$

Historiquement, le résultat (R) correspond aux dates suivantes pour chacun des protagonistes:monarchie : 1815, 1830 ; république :1793, 1848, 1870, 1946; empire : 1804, 1852.

Concernant les constantes, G. Vedel attire l'attention sur la troisième république, mais il n'apparaît pas que le modèle ait changé au XXe siècle compte tenu de la fin des deux républiques suivantes décidée de manière dramatique par Ph. Pétain et Ch. de Gaulle : le charisme et le prestige ont pu alors faciliter une personnalisation du processus de finalisation.

Cette constante met en valeur la discontinuité et la répétition des causalités scéniques des changements constitutionnels : les défaites (1815, 1870, 1940), les crises internes (1793, 1830, 1848, 1870), les mutations politiques (1804, 1852, 1958).

Ces circonstances conduisent à des interprétations paradoxales des fonctions constitutionnelles dans l'histoire politique du pays. D'une part, elles apparaissent comme des instruments dans la gestion d'un système politique centralisé : à ce titre leurs changements sont autant de réponses à des situations critiques non constitutionnelles. D'autre part, elles révèlent une adaptation normative à différents régimes politiques; ainsi, la séparation des pouvoirs, qualifiée par G. Vedel (op.cit. : 148) d'arme utilisée entre eux par les pouvoirs, peut varier de la garantie juridique des droits et libertés (1793) à la simple énumération de "trois fonctions de l'Etat" (1940).

Sur le plan socioculturel, les constitutions sont l'expression de tendances politiques profondes s'inscrivant dans le long terme. Ainsi, la monarchie et l'empire ont quitté le lieu des légitimités finalistes - depuis les années 1870. La référence à l'Etat français est un accident qui n'a duré que le temps d'une crise internationale. La constitution de la Ve République instaure un nouvel équilibre entre les pouvoirs au profit de l'exécutif afin de rétablir une autorité jugée défaillante. Pour des raisons géopolitiques, et contrairement à la tradition constitutionnelle américaine, la suite des constitutions des Républiques en France semble devenir en elle-même un principe de légitimité par lequel un texte principal adopté démocratiquement donne un fondement (par métaphore et métonymie) aux actes des différents pouvoirs de manière légale ou par exception. La légitimité constitutionnelle républicaine devient alors le lieu d'un jeu aléatoire à somme variable où interviennent la Scène politique jugée par ses Résultats, face à une Finalité nouvelle représentée par un Décideur possédant des Instruments dont un certain appui populaire :

$$S [(D, F, I, A) (R < 0)] \rightarrow D [(A, I, S) (F > 0)]$$

En conclusion, la topique actantielle construite à partir de l'histoire des constitutions françaises permet de définir trois niveaux d'une logique normative évolutive.

Le niveau culturel sociopolitique, héritage du passé, où prend place la conscience communautaire et ses expressions : Etat-nation, souveraineté politique, citoyenneté, légalité, défense.

Le niveau de la légalisation constitutionnelle des acteurs et des actions en vue de concilier valeurs sociétales et comportements particuliers dans un contexte historique global : chefs d'État, assemblées représentatives, organisations politiques, administration centralisée et territoriale.

Le niveau institutionnel instrumental permettant l'adaptation des règles et des pratiques aux changements locaux intérieurs (majorités, pressions, conflits) ou extérieurs (alliances, hostilités) : libertés et droits individuels, liberté du commerce et de l'industrie, syndicalisme, instruction publique, liberté d'association, séparation de l'église et de l'état, vote féminin, protection sociale, décolonisation, communauté européenne...

VII. 3. 2. Russie et URSS dans une scène mondialisée

Analyser la relation floue entre marxisme et bolchevisme est une manière de mettre en question l'opposition entre socialisme et capitalisme qui a dominé la pensée économique, politique et philosophique au XXe siècle. Après l'effondrement de l'URSS, il apparaît que le verdict s'impose de lui-même en ce qui concerne l'échec de l'économie planifiée face à l'économie de marché. Certes, on peut se poser la question de "savoir pourquoi le socialisme, dans ses formes les plus autoritaires, a séduit si longtemps les meilleures intelligences". Et l'on peut se contenter de répondre : "si tant d'experts se sont trompés, c'est moins en effet par défaut d'expertise que par aveuglement sur un système économique dont les supposées perversités ont été érigées en mythes". D'où la valorisation d'un capitalisme fondé sur le marché et sur une "logique du compromis" dans les relations sociales (J. Marseille, Nouvelles lectures sur les avatars flous de la longue crise, Problèmes économiques, n° 2714, mai 2001 : 19-26). De ce qui précède, rien ne permet cependant de conclure que l'aveuglement et la mythomanie, ou simplement les effets trompeurs aient disparus dans les expertises contemporaines.

La linguistique socio cinétique essaye de poser le problème à un autre niveau de complexité : en l'occurrence, l'expérience de l'URSS est-elle socialiste au sens marxiste et léniniste ? Comment tenir compte de

la Russie en tant que réalité géopolitique et culturelle, gouvernée par des leaders qui se sont prévalu d'un scientisme matérialiste dans des environnements troublés et changeants absolument imprévisibles ? Les bonnes idées peuvent venir de l'Occident, elles peuvent même être source de légitimité, mais comment les appliquer dans un cadre si différent ? Questions à mon avis, essentielles concernant un phénomène toujours actuel : le développement économique et l'adaptation sociétale à un processus de modernisation importé.

Concernant le développement de la Russie soviétique, deux formes topiques paraissent dominantes, précédées d'un exposé concernant les héritages russe et marxiste originaires :

La première concerne la construction d'une légitimité : le socialisme dans un seul pays ; elle comporte deux périodes de personnification du régime par Lénine et Staline reconnus comme décideurs politiques ultimes bien que dans des formes très différentes (C. Roig, La grammaire politique de Lénine, Paris, L'Age d'Homme, 1980).

La seconde traite de la guerre froide en tant que phénomène de mondialisation conflictuelle, fondé sur une économie de guerre dans les pays capitalistes comme dans les pays communistes;

1) L'héritage russe et marxiste des bolcheviks.

L'héritage russe peut être représenté par un conditionnement scénique constituant une forme de causalité dans ses manifestations temporelles (historiques, climatiques...) La géopolitique est révélatrice de facteurs stables jouant un rôle déterminant dans le développement historique de la Russie : un territoire étendu sur deux continents avec d'immenses frontières à protéger, unifié par les Romanov, dont les accès aux mers libres sont rares et dispersés. Isolement, diversité ethnique, communications difficiles sont les particularités dominantes des conditions de vie dans cette immensité (Tchekhov La steppe). Historiquement, ces caractéristiques physiques ont permis de vaincre les invasions continentales (Napoléon, Hitler), en revanche l'accès difficile aux mers s'est révélé une faiblesse (guerre de Crimée, guerre russo-japonaise). En ce qui concerne l'économie, l'exploitation des richesses du sol et du sous-sol se heurte aux difficultés d'exploitation et de transport dans un environnement dur. Tel est le contexte qui a déterminé l'organisation de l'empire tzariste qui ne constitue pas un État au sens européen. Le système de pouvoir repose sur une oligarchie à trois composantes : une féodalité territoriale, une hiérarchie administrative et militaire, une église orthodoxe qui crée une forte identité religieuse (slavophile, antisémite). Le tout soumis à la puissance sacrée d'un tzar appuyée sur un régime policier et un développement des bagnes sibériens (Dostoïevski, Souvenirs de la maison des morts).

L'héritage marxiste est le fait de quelques intellectuels exilés en Europe et en quête d'une solution "moderniste" aux problèmes économiques et sociaux posés par le début de l'industrialisation et la condition misérable faite aux ouvriers, lesquels sont perçus par les socio-démocrates et d'autres partis comme un prolétariat naissant à éduquer dans une perspective révolutionnaire. La révolte de Saint-Petersbourg (1905) et ses suites cristallisent l'opposition non seulement au régime tzariste mais également au capitalisme européen. Lénine se fit l'analyste et l'interprète de Marx. Le parti bolchevik fut créé en 1912, optant pour une révolution socialiste dans un seul pays où dominait la population rurale et le mysticisme religieux. Après l'échec d'un mou-

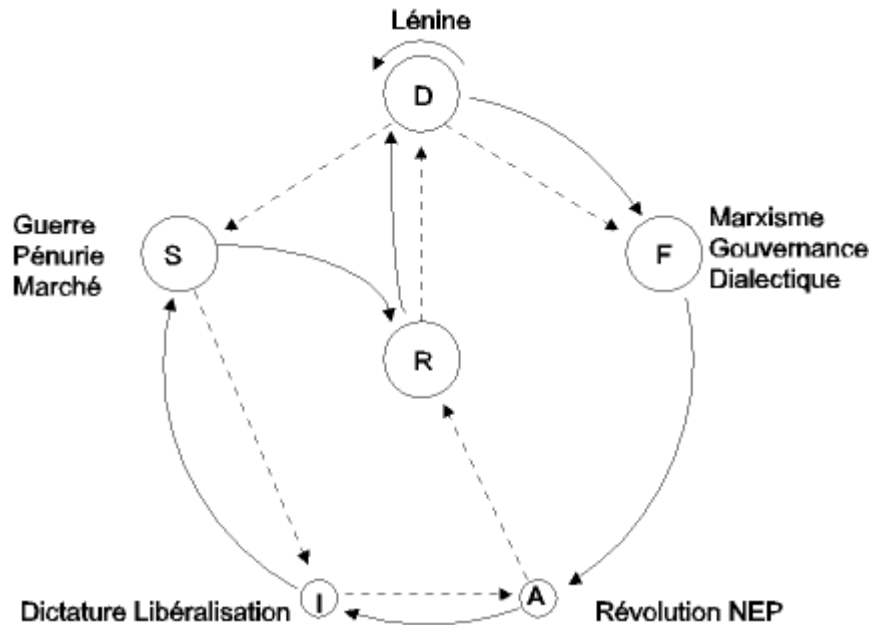
vement représentatif avec douma (février 1917), la guerre mondiale allait permettre, de manière occasionnelle, aux idées marxistes d'être expérimentées en Russie.

2) La construction d'une légitimité : le socialisme dans un seul pays.

La première étape de la "russification" du marxisme est constituée par le léninisme traduisant une personnification d'un pouvoir en quête de légitimité, réussissant cependant à idéologiser des événements et des situations disparates, une sorte de rationalisation freudienne. Tel est l'objet d'une première option concernant la finalisation marxiste des instruments institutionnels dans la sphère politique interne ; mettant l'accent sur le conflit entre capitalisme et socialisme, sur la lutte des classes et la dictature du prolétariat, elle s'appuie sur des organisations telles que le contrôle de l'armée, le parti, la tchéka, le centralisme démocratique, l'engagement contre les russes "blancs". La seconde option peut être présentée comme une scénisation de l'action pour tenir compte des contraintes environnementales. La personnalité de Lénine joua un rôle essentiel à cet égard, souvent en opposition avec ses collaborateurs : retour en Russie avec la complicité allemande, arrêt des combats et paix de Brest-Litovsk, abandon des alliés, communisme de guerre, économie de pénurie et de famine, révolte de Kronstadt. Autant d'événements qui se révélèrent difficiles ou pervers et qui furent à l'origine d'initiatives novatrices et contestées.

C'est ainsi que prit forme une stratégie politique autonome et adaptée à un espace-temps allant bien au-delà du conflit capitalisme-socialisme. Nécessité de créer un État : le parti fut étatisé en conséquence après la dissolution de l'assemblée constituante (janvier 1918). Des décisions furent alors prises qui impliquaient une extension sensible des conceptions bolcheviques : ralliement de cadres administratifs et militaires, coopération avec les paysans, tolérance d'opposants dans et hors du parti, séparation de l'Église et de l'État, création de l'URSS et de l'internationale communiste... Nécessité de pourvoir aux besoins du peuple : en 1921, la NEP marque un tournant décisif dans la politique léniniste : elle rétablit une certaine liberté économique en supprimant les réquisitions de produits agricoles et en permettant à des entreprises de se développer. Il s'ensuivit un démarrage économique; pour certains, la manifestation d'un capitalisme embourgeoisé et koulakisé ignorant le développement d'une industrie lourde base d'un prolétariat nécessaire à une économie socialiste, idée reprise et mise en oeuvre par Staline.

Formellement, la stratégie politique léniniste est une suite temporelle de situations et d'actions imposant des paris à enjeux variables. Elle est traduisible dans une formule topique de recouvrements alternatifs centrés sur les résultats (R) attendus ou obtenus de deux circuits décisionnels (D) : l'un privilégiant une finalité marxiste (F), l'autre la réalité scénique (S) et l'adaptation instrumentale (I). Ce qu'exprime une relation graphique non stricte. Les flèches continues indiquent le circuit finaliste, celles en pointillé le circuit scénique :



La seconde étape de la russification du marxisme, le stalinisme, s'oppose d'emblée à la précédente par le choix d'une stratégie à somme nulle fondée sur un retour impératif à la dictature du prolétariat ou, plus précisément, à l'instauration d'une dictature politique en vue de créer un prolétariat inexistant jusque là, et cela, par la force et la répression, en vue d'imposer la révolution industrielle en Russie.

De la personnalité de Staline, nous retiendrons son origine géorgienne qui a pu favoriser un effet de voisinage ethnique dans son comportement, son éducation dans un séminaire orthodoxe qui a pu favoriser certaines orientations idéologiques concernant la "purification" des rapports sociaux jugés douteux et punissables dans une perspective "sacrificielle", enfin, son anti-intellectualisme opposé à l'europanisme de Lénine et Trotski par exemple.

Le "bien" bolchevik opposé au "mal" capitaliste devint la base d'un conflit radical par sa finalité universaliste. Instrumentalement, il fallait privilégier à tout prix l'industrie lourde en sacrifiant sans ménagement les nantis de la NEP et d'abord les paysans qu'il fallait chasser des terres occupées par tous les moyens. Après le "grand tournant" (1928), ce fut l'enjeu des années 1930 : d'une part, la collectivisation, la terreur, la déportation, la famine ; d'autre part, l'industrialisation planifiée et sublimée par le stakhanovisme et la propagande. Théoriquement, cette politique a pour conséquence une constante du régime que l'on pourrait appeler l'effet Quesnay (Tableau oeconomique, 1758) désignant le coût de la survie d'une société en cas de dévalorisation de la production agricole paysanne par des réglementations ou des répressions favorisant d'autres activités pour des motifs politiques. La capacité du système à se reproduire dépend alors de l'apport de ces activités aux productions de base (technologies, investissements, machines, transports) dont la limitation s'est révélée une constante de l'économie soviétique en matière de biens de consommation.

En politique intérieure, tout se résume d'abord à une élimination des contrevenants et des opposants.

Contrevenants objectifs : Staline supprime, outre les koulaks, les bourgeois, cadres, intellectuels, militaires qui avaient rallié et servi la Russie sous Lénine ; il provoque ainsi une mutation des élites dont l'impact se manifestera dans le parti pendant des décennies. Oppositions subjectives : sont expulsés condamnés exécutés les leaders communistes, compagnons de Lénine et comparses dangereux. Secrétaire général du Comité Central (1922), Staline développa une stratégie inquisitoriale valorisante pour lui, devenu le défenseur unique d'une justice assurée par des procès publics où le "mal" pouvait facilement être transformé; en trahison ou en espionnage. Il confisque ainsi le pouvoir en quelques années en adoptant une stratégie centriste, jouant sur les alliances des uns contre les autres à propos des choix, allant - de l'expulsion de Trotski en 1929 à la purge de 1936-1938.

Le prestige international du communisme soviétique et de la politique de Staline a été rendus possible et peut-être même provoqué par une coïncidence historique avec les événements cruciaux qui ont bouleversé les années trente. A l'effet Quesnay s'est alors superposé un effet de prophétie auto réalisée par lequel le "hasard"; en créant des contradictions réelles et profondes à l'échelle mondiale, a pu fonder le mythe d'une 'Vérité'marxiste-léniniste-stalinienne.

Après 1929, c'est la Grande Dépression qui domine la scène mondiale et suscite des dictatures belliqueuses d'une part, des mouvements ouvriers, politiques, intellectuels hostiles au capitalisme, d'autre part. Ainsi se constitue la base d'un mouvement communiste inspiré par l'expérience bolchevique devenue un modèle historique à l'échelle du monde. L'URSS intervient dans la guerre civile espagnole ce qui est une manière de manifester sa présence. La seconde manière est la signature du pacte germano-russe de 1939, suivi d'un pacte russo-japonais, manifestement inspirés de la tactique de Lénine lors de la première guerre mondiale : tirer profit des guerres entre Etats capitalistes, continuer l'activité révolutionnaire en URSS.

En 1941, l'invasion hitlérienne ouvre une nouvelle période historique : devant la menace allemande et les terribles pertes et destructions subies, Staline favorise l'unité de tous les Russes dans une guerre qualifiée de "patriotique". Il conclut des accords et des traités avec les États capitalistes alliés. La victoire fait de l'URSS la seconde puissance mondiale, dominant une partie de l'Europe, négociant à égalité avec les autres vainqueurs de haut rang : États-Unis et Grande-Bretagne.

Le fait nouveau qui allait déterminer l'évolution de la politique mondiale dans la seconde moitié du XXe siècle est l'emploi de la bombe atomique par les États-Unis.. Les anciennes stratégies allaient très vite se-.révéler périmées dans un contexte mondial différent.

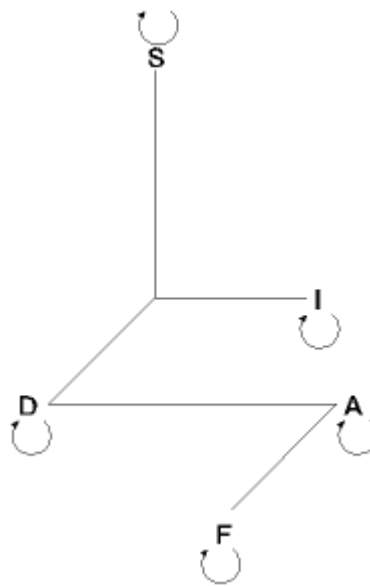
3) La mondialisation politique conflictuelle : la guerre froide.

La période qui va de 1945 à 1991 est caractérisée par la confusion et les contradictions de la politique soviétique partagée entre l'héritage du stalinisme et la déstalinisation, entre une économie de guerre coûteuse et un développement insuffisant.

La scène (S) est alors complexe, changeante, contraignante, sous forme d'un conflit interétatique dans

lequel le communisme devient un enjeu dans la guerre des blocs, laquelle fut très vite régulée par un instrument (I) décisif : l'arme atomique dont les effets dévastateurs vont déterminer les actions (A) tant en politique intérieure par le développement des armements stratégiques (atomes, missiles, défenses, etc....), qu'en politique étrangère où le rapport de force devient déterminant à tous les niveaux (technologies, expansion territoriale, alliances, conflits, etc....). Les décideurs (D) restent motivés par des considérations circonstancielles. La finalité (F) marxistéléniniste devient une référence parmi d'autres (lutte des classes, prolétariats nationaux, NEP).

La relation topique entre les positions de base devient alors arborescente non stricte :



Ce graphe exprime un jeu de stratégie "théoriquement" à somme nulle mais "dramatisé" par une menace extrême (en S) de destruction totale des belligérants. Le décideur ne peut avoir qu'une information incomplète sur le résultat d'une action agressive ayant un tel enjeu dans une situation où le choix fondamental porte soit sur une élimination toujours possible des deux ennemis, soit sur une entente tacite ou négociée pour écarter l'emploi d'une telle arme absolue. Tel fut le contenu de la guerre froide sous son aspect essentiel de "paix atomique" et de "compétition technologique". A quoi peut s'ajouter le développement d'une guerre "idéologique" dans les deux super-puissances : répression des soulèvements en Europe de l'Est d'un côté ; pratiques inquisitoriales de l'autre (McCarthyisme).

Un autre choix circonstanciel a porté sur des actions locales que l'on a pu considérer comme des tests de l'agressivité et du potentiel militaire courant de l'adversaire dans des conflits indirects et limités ne justifiant pas en toute probabilité une remise en cause du choix fondamental. D'où les péripéties qui ont accompagné le blocus de Berlin (1947), la guerre de Corée (1950-53), les spoutniks, les affaires de l'U 2 et de Cuba (1960-62),

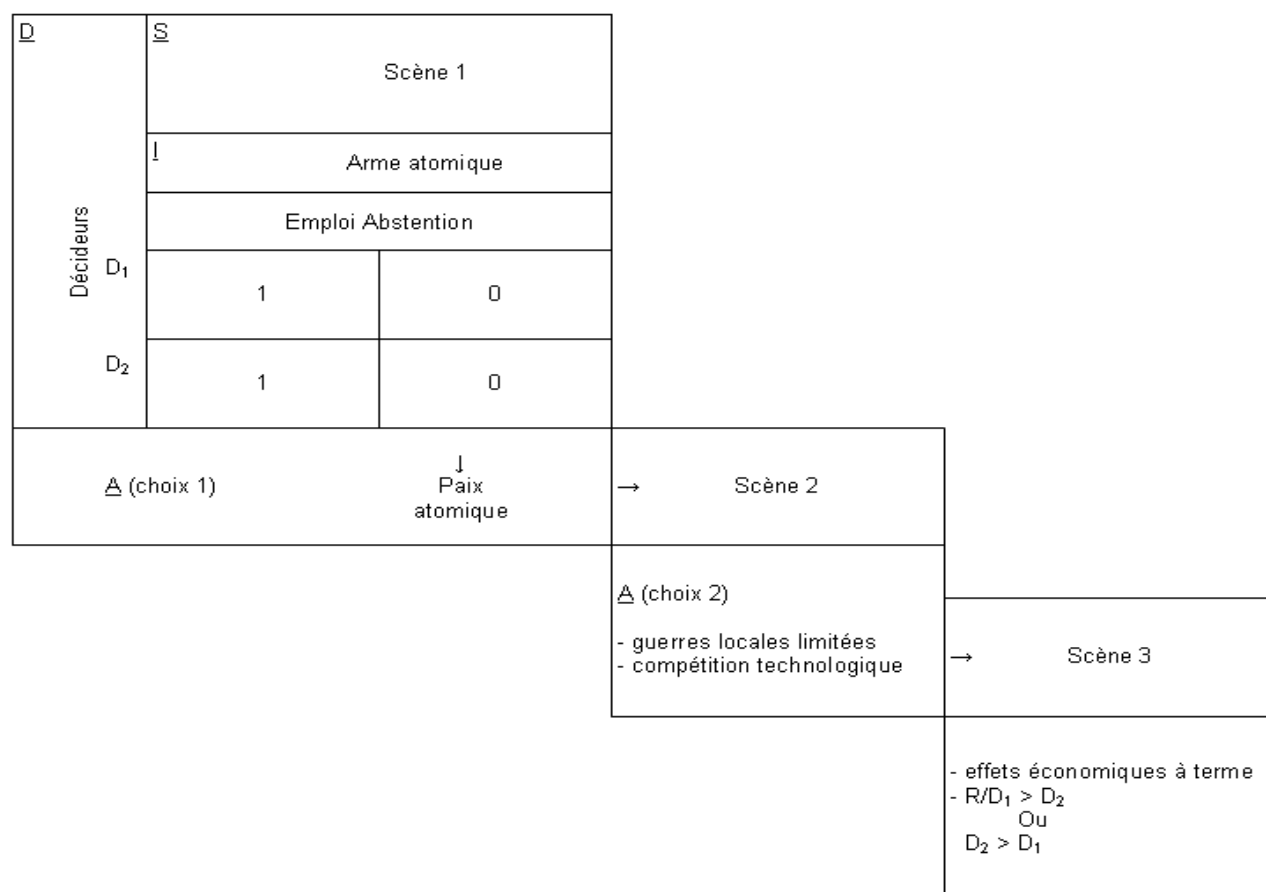
les guerres du Viêt-nam (1963-73) et d'Afghanistan (1978-89). Ces mises à l'épreuve de l'adversaire ont été positives en raison de deux caractéristiques qui les distinguent du dilemme du prisonnier dans le jeu à somme nulle :

1^o) la prise de conscience de limites à ne pas dépasser ;

2^o) l'instauration de communications au plus haut niveau entre les antagonistes (échanges téléphoniques, informations par espionnage, "coexistence pacifique") (T.C. Schelling, The Strategy of Conflict, N.Y., Oxford, U. P., 1963 :115,257 sq.

Mais le sort de la guerre froide s'est décidé à partir d'un résultat (R) fait à un autre niveau où intervient le long terme hors de la politique : celui du coût économique et social de la production d'armements sophistiqués sous la pression des lobbies militaires. Les effets dommageables sont certes dus en partie à la planification centralisée, mais il convient de leur ajouter les conditions géopolitiques et surtout les destructions massives provoquées par la seconde guerre mondiale dans le pays (qui avait refusé l'aide du Plan Marshall). Un autre facteur qui a opéré à terme, c'est le changement de génération qui entraîna un renouvellement des leaders au détriment des apparatchiks staliniens; il en résulta une diffusion de l'information et une conscience politique novatrice qui allaient se concrétiser dans la glasnost et la perestroika. Le graphique suivant globalise les processus et les ruptures impliqués par ces facteurs locaux.

Schéma : jeux de stratégie chronodiversifiés



Voici, à titre indicatif, quelques comparaisons statistiques permettant d'évaluer l'état de "déséconomie" de l'URSS en déclin:

Dépenses consacrées à la défense (milliards de dollars)		USA	URSS
	1949	13.5	13.4
	1963	52.2	54.7
	1970	77.8	72
Parts de la production mondiale Brute : 1960-1980 en %			
	1960	25.9	12.5
	1980	21.5	11.4
PNB total (milliards de dollars)	1980	2590	1205
PNB par habitant (en dollars)	1980	11360	4550

(Source : P. Kennedy (trad.) Naissance et déclin des grandes puissances, Paris, Payot, 1989 : 431, 486, 487).

4) Perestroïka et fin de l'URSS

Une première rupture résultant des mutations scéniques fut marquée par l'accès de Michail Gorbatchev au poste de secrétaire général du comité central du PCUS. Un changement de décideur, devenu historiquement possible, fut le prélude à une catastrophe politique d'ampleur mondiale en permettant une transformation de la nature du pouvoir étatique et la construction d'une nouvelle Russie. Le dernier secrétaire général du parti croyait possible de réformer le système de l'intérieur en changeant sa structure avec une finalité rénouvée faisant référence au Lénine de la NEP, source idéologique d'une perestroïka et principe légitimateur d'une révolution socialiste au réformisme plus réaliste car plus ouvert à la pluralité, à la transparence et à la démocratie, compte tenu d'un risque d'échec "à la Lénine" dont on était conscient.

Ce risque était réel et il peut être exprimé par un paradoxe : instaurer plus de liberté dans une société modelée par des formes de pouvoir autocratique, ne peut que profiter d'abord à celles-ci et créer une situation chaotique. Cette situation a d'abord été rendue possible par la détente dans les relations internationales qui fit suite au résultat des jeux de stratégie défavorable à l'Union Soviétique. Il s'ensuivit une détente sur le plan extérieur qui rendit incroyable le thème traditionnel de la menace d'un ennemi toujours présent (retrait d'Afghanistan, chute du mur de Berlin, concertation avec les pays capitalistes). En revanche, sur le plan intérieur, les difficultés économiques et la pénurie subsistaient entraînant malaise et méfiance à l'égard de la perestroïka. Des revendications et des résistances contradictoires se manifestèrent dans les appareils et organisations lésés par les réformes : le parti communiste est remis en cause en tant que nomenklatura étatique; le lobby militaro-industriel est affaibli par les réductions de crédits, les républiques de l'Union souhaitent autonomie et indépendance ce qui entraîne des répressions mal venues (Pays baltes, Caucase) ; une élite politique autonome se développe, prête à profiter de la situation. C'est ce que permirent les événements de l'été et de l'automne 1991 : le putsch de l'armée tenu en échec, la stratégie d'élimination de Gorbatchev par Boris Eltsine consacrant la division et la disparition de l'URSS en se faisant élire président de la seule Russie, capitale Moscou, où le secrétaire général du PCUS n'avait dès lors plus sa place, pas plus que dans les autres républiques européennes ou asiatiques. Ainsi, la scénisation de la situation par le projet de perestroïka déboucha sur une personification conflictuelle dans la tradition russe (A. Gratchev, Le mystère Gorbatchev, trad., Paris, Ed. du Rocher, 2001).

Durant la décennie 1990, la Russie s'intégra dans l'économie mondiale en tant que pays en transition membre des PECO (Pays d'Europe Centrale et Orientale), engagée dans une politique de déplanification difficile et aléatoire. L'expérience de l'économie de marché y est réduite et contrôlée par les "héritiers" de la nomenclatura : les "oligarques" et les "rouges" en cours de fusion dans un syndicat patronal face à un parti communiste présent dans la "nouvelle pensée". Le système financier a du mal à se stabiliser face à des spéculations et à des pratiques frauduleuses. Les choix économiques toujours orientés par l'État et les militaires vont de pair avec une économie de subsistance où, paraît-il, 40 % des habitants vivent au seuil de la pauvreté, l'espérance de vie des hommes est de 57 ans, la natalité connaît une baisse importante. Les médias sont à nouveau l'objet de contrôles et de pressions politiques, et la guerre de Tchétchénie apparaît comme une répétition séculaire (Tolstoï, Les Cosaques). La Communauté des États Indépendants (CEI) a succédé à l'URSS

non sans créer de nouveaux problèmes interétatiques. Ainsi peut se poser à nouveau le problème des constantes russes face à l'importation d'une modernité étrangère décevante, avec un retour à l'apprentissage de la démocratie par la douma et d'une économie libérale à expérimenter après une interruption de trois quarts de siècle (E. Luttwak, Appliquer le turbo-capitalisme en Russie : une erreur de modèle, Problèmes économiques, n° 2704, mars 2001 : 54 sq).

Conclusion conjecturale et prospective

La conception logo logique de la formalisation permet d'interpréter celle-ci comme une intellection dynamique opérant dans plusieurs directions, suivant différentes modalités tenant compte de la nature évolutive et perfectible des formes linguistiques définissables, allant de la rigueur et de la certitude au doute et au mythe, dans une perspective toujours ouverte au questionnement.

D'emblée, une première voie concerne la définition même du langage : à ses propriétés structurelles et littéraires vient s'ajouter la spécialisation cognitive, base de la formalisation impliquant les rapports entre l'extension et l'intension dans les définitions et la compréhension de la réalité. Ainsi, l'analyse sémiologique s'est révélée essentielle, appliquée au contrôle linguistique de l'arbitraire du signe transformé en source de liberté créatrice permettant de passer des quantifications empiriques à la théorie des nombres puis à l'algèbre et aux constructions formelles projectives et virtuelles. Que dire du lien que la linguistique idéo figurative permet d'établir entre les formes logiques et les figures rhétoriques ou tropes, entre relation et sens comme dans la théorie des ensembles ou dans les régulations axiomatiques confrontées à la négation dialectisée ? En pragmatique, ces situations peuvent être considérées comme des lieux ou des objets de fixation et de conflit créés par la nature langagière des mathématiques et les interprétations qu'elle suscite : progrès, crise ou "révolution scientifique", sujettes à des réserves, critiques ou positions idéologiques, causes de déviations entre langage, communication et connaissance, notamment en matière d'éducation et d'apprentissage. Les textes de mathématiciens qui suivent donnent un aperçu de ce conditionnement linguistique pragmatique, composante de la logologie, source irremplaçable d'information, de suggestion et de conjecture.

G.Th. Guilbaud commence son manuel de Mathématiques (Paris, PUF, 1963: 1 sq) par un avertissement concernant les effets de métaphore et de catachrèse liés à l'utilisation "d'un vocabulaire apparemment banal, en des sens fort spéciaux... Il y a danger, c'est sûr, et l'étudiant devra être constamment sur ses gardes. D'autant plus que ni Littré, ni Larousse, ni aucun de leurs émules, ni la pratique des divers vocabulaires, littéraires ou populaires, ne nous enseignent à distinguer correctement les mots limite, borne, frontière..." Cette dramatisation sémantique sert d'introduction à une définition codifiée de mots tels que Ensemble, Élément, Partie mettant en cause une forme rhétorique fort ancienne où la propriété du tout concerne l'intension alors que les parties dénotent l'extension.

Dans une préface, J. Dieudonné (in F. Monnoyeur, Ed.; Infini des mathématiciens, infini des philosophes, Paris, Belin, 1992 : 5) écrit à propos du "concept d'ensemble infini" : "Mais comme le mot "infini" a tant de sens variés en dehors des mathématiques, je crois que très peu de personnes qui ne sont pas mathématiciens professionnels se rendent compte de ce que ceux-ci entendent exactement par cette notion et quelles propriétés ils lui attribuent". Ces remarques relevant d'une prise de position disciplinaire spécialisée ignorent ce que la logologie tendrait à valoriser : l'importance des formes langagières originelles relevant de la linguistique idéo figurative dans l'élaboration, le développement et l'invention de formés mathématiques novatrices par interprétation.

De telles évolutions peuvent être comprises dans les deux directions inter faciales déjà présentées : l'une tendant au perfectionnement du "champ théorique" de la formalisation dans le domaine des connaissances abstraites par inférence inductive et déductive ; l'autre tournée vers une meilleure compréhension du "cadre référentiel" composé d'objets concrets et idéels auxquels le langage humain ne peut échapper. D'où les oppositions constantes entre intuition et régulation, entre rigueur et probabilité, entre théorique et mythe, autant de sujets de débats et de controverses concernant le (ou les) fondement(s) des mathématiques d'un point de vue logique et philosophique. Dans l'approche linguistique pragmatique, de telles oppositions ont un autre sens en tant que reflets de situations de communication créées par la nature évolutive des langages en tant que sources et que supports des connaissances et des découvertes.

Une voie consiste alors à privilégier le dynamisme des idées : "Les mathématiques, encore une fois, ne portent pas sur des calculs, mais sur des idées... Carl Friedrich Gauss improvisa une démonstration en cinq minutes, disant (non sans ironie) que ce n'était pas affaire de notations mais de notions. Les calculs ne sont qu'un moyen pour atteindre un objectif... Toutes les idées ne sont pas de nature mathématique, mais toute oeuvre mathématique contient nécessairement une idée... Nous comptons au moins cinq parties distinctes où nous pouvons penser des idées mathématiques : le nombre, la forme, l'arrangement, le mouvement, la chance" (I. Stewart, Les mathématiques, trad., Paris, Belin, 1989 ' 7-8). La gestion grammaticale cognitive de l'interface langagière oblige alors à tenir compte de la bipolarité du processus entre cerveau et environnement du sujet pensant: capacité symbolique d'une part, données matérielles, culturelles et technologiques d'autre part.

Ces dernières ouvrent une seconde voie concrétisée par les ordinateurs permettant le développement d'une mathématique expérimentale où la composante "calcul" reprend de l'importance à un niveau d'efficacité exceptionnel obtenue par des algorithmes contrôlables. "L'influence de l'ordinateur est venue donc conforter un intérêt théorique pour la question fondamentale qui consiste à s'interroger sur l'extension du pouvoir autant que sur la "certitude" des mathématiques finitaires ou constructives... D'une manière générale, il faut bien prendre acte du fait que l'utilisation courante des ordinateurs pousse le mathématicien à chercher des répliques algorithmiques des disciplines traditionnelles de l'infini et du continu, géométrie, analyse ou topologie, qui s'adaptent directement à la conformation finie et discrète de l'outil technologique... La caractéristique des mathématiques finitaires actuelles est que leurs adeptes se trouvent au carrefour d'au moins deux des quatre disciplines suivantes : mathématiques, informatique, logique et philosophie" (H. Sinaceur, in F. Monnoyeur, op.cit.1992 : 195 sq).

La troisième voie concerne la projection formelle et la virtualité descriptive qui placent le processus de connaissance dans un univers abstrait où la métaphore se fait représentation, modélisation, simulation. Voici quelques remarques introductives concernant la topologie sous ses deux aspects : la théorie des noeuds et la théorie des variétés dont fait partie la théorie des catastrophes de Thom et Zeeman (K. Delvin, Mathématiques. Un nouvel âge d'or, trad., Paris, Masson, 1992 : 201-202).: "Est-ce que les physiciens utilisent le genre de mathématiques qu'il faut pour étudier l'univers spatio-temporel à quatre dimensions dans lequel nous vivons ? Jusqu'en 1982 tous les mathématiciens auraient dit : "Oui, bien sûr, c'est le seul genre". Il y a d'autres sortes, tout à fait différentes, de mathématiques qui s'appliquent à un univers à quatre dimensions - mais seulement à

un univers à quatre dimensions - aucun traitement aussi spécial n'est nécessaire pour deux dimensions, ou pour trois, ou pour cinq, six, et au delà. L'espace à quatre dimensions est spécial non seulement parce que notre univers apparaît quadridimensionnel, il est également spécial au point de vue mathématique - mais d'une façon complètement inattendue". La théorie des catastrophes, déjà présentée (Supra), permet de poser la question des dimensions à propos des sciences sociales constituant à cet égard une transition spatio-temporelle aussi intéressante que problématique concernant une linguistique socio cinétique ambivalente en tant qu'instrument et objet d'étude de topiques actantielles conventionnelles ou typologisées statistiquement, impliquant l'interprétation de concepts, d'informations, de normes et de durées, afin de donner un sens à une formalisation en intension et en extension probabiliste et provisoire.

Ces remarques donnent un sens particulier aux critiques suivantes de J.P. Delahaye (Logique, informatique et paradoxe, Paris, Belin, 1995 : Ch.17). "Le réalisme finitiste sert de base au formalisme qui est "l'idéologie" de recours de beaucoup de mathématiciens. Refusant de considérer qu'il existe une réalité mathématique plus abstraite que la réalité finie, ou considérant que l'extension du réalisme aux objets infinis est dangereuse et incertaine, le réaliste finitiste propose de se limiter à l'univers évident des objets finis . Cette position est renforcée par le fait que, moyennant des conventions syntaxiques adéquates, toutes les démonstrations peuvent se ramener à des manipulations de symboles... Il ne faut pas bien sûr confondre inexistence et inconnaissabilité, mais force est d'admettre que toute réalité dont la connaissance est par principe interdite devient douteuse ; c'est en ce sens sur le théorème de Gödel est un argument contre le réalisme... Des classes entières d'énoncés possédant un sens très simple (relatif au degré de complexité de suites finies de zéro ou de un, ou relatif au nombre de solutions d'équations élémentaires) échappent inévitablement au pouvoir de tout formalisme".

Ce texte est essentiel car il implique que toute signification naturelle ou intuitive peut déborder le cadre de toute formalisation restrictive en extension, et donc construire des relations ou des réalités par connexions et inférences cognitives. L'indécidabilité gödelienne déjà exposée (Supra V.2.2) devient alors une indécidabilité relative, voire hypothétique ou commede, dans une formalisation logologique englobante de langages diversement spécialisés.

La quatrième voie est une généralisation de cette action symbolique permise par l'intellection du logos par le logos. Dès 1884; G. Peirce (Les fondements de l'arithmétique, trad., Paris, Seuil, 1969 : 130-142) critiquait la définition axiomatique de formules numériques telles que $2 + 2 = 4$ que l'on peut obtenir par des adjonctions d'unités à un nombre compris dans une succession considérée à priori comme évidente. L'auteur pose la question : "Le fondement de l'arithmétique ne gît-il pas plus profond que celui de toute science expérimentale, plus profond même que celui de la géométrie ? Les lois de l'arithmétique gouvernent le domaine nombrable. C'est le plus vaste. Il inclut non seulement le réel, non seulement l'intuitif, mais tout le pensable"... Dans une telle interprétation, le lien avec la logologie peut être précisé à tous les niveaux langagiers, notamment par des rapprochements et des combinaisons de linguistiques sémiologiques, régulatrices, projectives permettant de distinguer des catégories de nombres par fonctions, relation ou incompatibilité aux niveaux de complexité d'une indécidabilité de type gödelien. Revenons à la célèbre formule $2 + 2 = 4$ pour

constater qu'elle peut évoquer intuitivement ou formellement un calcul de type "comme ça" où interviennent des racines carrées et des puissances arithmétiquement fondées permettant "en principe" de conserver l'égalité. Or, l'opération $\sqrt{2^2} + \sqrt{2^2}$ n'égale pas $\sqrt{4^2}$, autrement dit, n'égale pas 4. Ainsi, deux formules simples et syntaxiquement équivalentes se révèlent cependant sémiologiquement différentes, renvoyant à deux catégories de nombres également fondées mathématiquement : les finis rationnels et les infinis irrationnels produits d'un algorithme approximatif. Le calcul (additivité, commutativité) devient alors un objet idéal (complexité) dans un rapport logologique entre extension et intension.

Cet exemple nous ramène au langage, à sa nature et à sa fonction cognitive telles qu'envisagées par la logologie. Le cadre pragmatique joue un rôle important dans les rapports entre opinions, croyances et recherches à l'oeuvre dans les "révolutions scientifiques" kuhniennes. Mais l'approche logologique nous incite à poser le problème à partir d'autres dimensions que nous proposons de considérer comme autant de manifestations du principe de complémentarité débordant la conciliation idéale et commode entre particules et ondes, il permet d'envisager celle plus générale entre intension et extension définitoires, entre sens et mesure, entre temps et durées, entre données, concepts et formes. C'est ce principe qu'il convient notamment de placer à la base de la linguistique sociocinétique constituée en forme théorétique destinée à évaluer les limites de toute théorie, à la fois cognitive et idéologique, mais aussi, et surtout, objet de questionnements et source éventuelle de découvertes nouvelles.

Table des matières

Introduction	1
Ch. I Synthèse logologique : la grammaticalisation cognitive	4
I.1. Composantes et formes de l'auto-organisation des langages	4
I.1.1. Régulation.....	4
I.1.2. Structuralisme.....	5
I.1.3. Fonctionnalisme	7
I.1.4. Sémioses	8
I.1.5. Complexité.....	9
I.1.6. Epistémologie	11
I.2. La mathématisation du langage entre abstraction et référence	13
I.3. Composants et liaisons de l'interface langagière (IL)	18
Ch. II Pragmatique linguistique : communication et conditionnement	22
II.1. Le sujet entre pensée et réalité	22
II.2. Oppositions d'idées : entre raison et inventivité	27
II.3. Problème pédagogique, échec, questionnement.....	33
II.4. L'impact des technologies : l'informatique.....	35
Ch. III Linguistique idéo-figurative ; la formalisation rhétorique.....	39
III.1. Conceptions de l'idéation par les figures.....	40
III.2. Idéo-figures topiques et constructions formelles	43
III.3. Liaisons et connexions par inférences	46
III.4. Liaisons entre parties et totalité	48

III.5. Liaisons par négation et dialectique	50
Ch. IV Linguistique sémiologique : représentation, interprétation, signification	55
IV.1. Des signes aux nombres, de l'arbitraire à l'ordre.....	55
IV.2. Les nombres : instruments et finalités du calcul	62
IV.2.1. Catégories de nombres	52
IV.2.2. Fonctions et conceptions de zéro	63
IV.2.3. Suites complexes : nombres premiers et p-adiques.....	66
IV.3. L'algèbre : formes, constantes et variables	68
IV.4. Abstraction idéo-figuratives : sémiotiques ensembliste et paradoxale	74
IV.4.1. Sémiotique ensembliste	74
IV.4.2. Sémiotique paradoxale	77
Ch. V Linguistique théorétique : règles et divergences	80
V.1. Logistique : axiomatique, intuitionisme	81
V.1.1. L'axiomatique	81
V.1.2. L'intuitionisme	85
V.2. Métaformes mathématisées : infini, indécidabilité	86
V.2.1.L'infini	87
V.2.2.L'indécidabilité.....	91
V.3. Les champs conceptuels de la métalogue.....	97
V.3.1. La contradiction relativisée	97
V.3.2. La logique floue	100
V.3.3. Le niveau "méta-" des langages formels	103

Ch.VI Linguistique par projections formelles : l'objectivation par le calcul	105
VI.1. Le paradoxe de la transcendance : formalisme et interprétation.....	106
VI.2. La théorie des probabilités : raisons et incertitudes évaluées	116
VI.2.1. Une nouvelle philosophie mathématique	116
VI.2.2. L'axiomatique problématisée	119
VI.2.3. Modèles interprétatifs : entre forme et sens	121
VI.3. L'investigation de la complexité	124
VI.3.1. Les quanta	124
VI.3.2. Le chaos.....	133
VI.3.3. Les catastrophes.....	135
Ch. VII Linguistique sociocinétique : causalité, finalité action, chronodiversité	142
VII.1. Les topiques actantielles.....	143
VII.2. Les formalisations complexologiques	147
VII.3. Applications logologiques : deux illustrations	149
VII.3.1. Les constitutions françaises.....	149
VII.3.2. Russie et URSS dans une scène mondialisée	152
Conclusion conjecturale et prospective	161

Index

Table des matières